XXXI Санкт-Петербургская астрономическая олимпиада

теоретический тур, решения

2024

4 февраля

9 класс

1. 21 сентября наблюдатель в Санкт-Петербурге взглянул на небо и увидел высоко над горизонтом Луну, у которой была освещена ровно половина диска. В этот момент наручные часы наблюдателя показывали 19 часов. Определите, на какой максимально возможной высоте над горизонтом могла располагаться Луна в тот момент и в каком созвездии она должна была находиться? Уравнением времени пренебречь.

Решение:

Действие задачи происходит в день осеннего равноденствия. При этом, время по часам наблюдателя составляет 19 часов. Вспомним, что Санкт-Петербург находится на серединном меридиане своего часового пояса, однако, время в нем смещено на час вперед. Значит, действие происходило в 18 часов по времени долготы Санкт-Петербурга и Солнце должно было находиться на горизонте. При этом, в день равноденствия оно заходит в точке запада. Так как сказано, что у Луны была освещена половина диска, то угол в пространстве между Луной, Землей и Солнцем — $90°$, а так как Солнце расположено для наблюдателя в точке запада, то Луна находится на небесном меридиане, то есть кульминирует. Из условия видно, что Луна находится в фазе первой четверти и опережает Солнце по эклиптике на четверть круга. Следовательно, Луна находится в созвездии, в котором будет Солнце в день зимнего солнцестояния, то есть, Стрельца.

Определим максимально возможную высоту кульминации Луны в Санкт-Петербурге. Из-за наклона орбиты Луны к орбите Земли Луна может отклоняться максимум на $5°.2$ от эклиптики. Петербург находится в северном полушарии, а нам нужно оценить максимальную высоту, поэтому будем считать, что Луна находится севернее эклиптики на $5.2°$. Склонение точки зимнего солнцестояния равно $-23°.5$, следовательно, максимальное склонение Луны будет $\delta_{☾} = -23°.5 + 5°.2 = -18°.3$.

$$h = 90° - 60° - 18°.3 = 11°.7 \approx 12°.$$

Последнее приближение сделано из-за погрешностей расчета времен и точки равноденствия.

И.Д.Маркозов

2. В начале декабря прошлого года комета Галлея прошла афелий своей орбиты. Оцените ее скорость относительно Солнца сегодня, если известно, что перигелий орбиты она прошла 9 февраля 1986 года.

Решение:

Время между прохождениями перигелия и афелия — это половина периода, поэтому несложно вычислить, что орбитальный период кометы составляет несколько менее $P = 76$ лет. Воспользуемся III законом Кеплера и вычислим большую полуось орбиты $a = P^{2/3}$, например, так:

$$a = 76^{2/3} = \left(64 \cdot \frac{76}{64}\right)^{2/3} = 16 \cdot \left(1 + \frac{12}{64}\right)^{2/3} \approx 16 \cdot \left(1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{16}\right) = 18 \text{ а.е.}$$

Затем воспользуемся известным выражением для квадрата орбитальной скорости в задаче одного притягивающего центра

$$v^2 = GM_{\odot} \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)$$

и учтем, что комета сейчас находится фактически в афелии орбиты (прошло два месяца, изменение скорости при орбитальном периоде 76 лет явно очень мало), поэтому расстояние совпадает с расстоянием в афелии и $r = a(1+e)$, где e — эксцентриситет орбиты. Тогда

$$v^2 = GM_{\odot} \left(\frac{2}{a\,(1+e)} - \frac{1}{a}\right) = \frac{GM_{\odot}}{a} \left(\frac{2}{1+e} - 1\right) = \frac{GM_{\odot}}{a} \cdot \frac{1-e}{1+e}.$$

Проблемой является то, что нам неизвестен эксцентриситет орбиты (а попытка предположить, что он близок к единице, приведет к очевидному, но бесполезному выводу, что скорость близка к нулю).

Преобразуем это выражение, учитывая, что перигелийное расстояние $r_\pi = a(1-e)$, а эксцентриситет орбиты кометы e близок к 1. Получим

$$v^2 = \frac{GM_{\odot}}{a^2} \cdot \frac{a\,(1-e)}{1+e} \approx \frac{GM_{\odot} r_\pi}{2a^2},$$

откуда

$$v \approx \frac{\sqrt{GM_{\odot} r_\pi}}{\sqrt{2} \cdot a}.$$

Вычисления существенно удобнее вести в так называемой звездноастрономической системе единиц («год – астрономическая единица – масса Солнца»), в которой $M_{\odot} = 1$, а гравитационная постоянная, в чем несложно убедиться, равна $4\pi^2$. Поэтому скорость в астрономических единицах в год будет иметь вид

$$v \approx \frac{\sqrt{2r_\pi} \cdot \pi}{a}.$$

Тем самым задача свелась к оценке перигелийного расстояния r_π. Какие факты можно вспомнить о комете Галлея?

Известно, что она подходит сравнительно близко к Солнцу: кометная активность более чем заметна. Можно вспомнить, что в 1910 году (при очередном прохождении перигелия) Земля попала в хвост кометы Галлея, что вызвало нездоровый ажиотаж в тогдашних средствах массовой информации. Проще говоря, $r_\pi < 1$ а.е. С другой стороны, совсем уж близко к Солнцу она тоже не подходит: это привело бы к быстрому исчерпанию запасов летучих веществ в ядре кометы (а наблюдается она давно, что и позволило Эдмунду Галлею оценить период кометы), а то и к разрушению ядра. Зависимость результата от r_π не очень сильная, поэтому для оценки можно взять какое-то среднее значение, например, $r_\pi = 0.5$ а.е., что упростит вычисления (а заодно окажется близким к реальному значению 0.59 а.е.). Получаем, что скорость $v = \frac{\pi}{18} \approx \frac{1}{6}$ а.е./год.

Вообще говоря, ответ можно в таком виде и оставить (в условии задачи нет ни слова о конкретных единицах, в которых нужно его получить), но можно перевести и в более «стандартные» единицы. Для этого можно вспомнить как готовый результат то, что 1 а.е./год ≈ 4.74 км/с, а можно учесть, что орбитальная скорость Земли, равная примерно 30 км/с, равна и 2π а.е./год. Второй вариант приведет к итоговому ответу

$$v = \frac{\pi}{18} \cdot \frac{30}{2\pi} = \frac{15}{18} = \frac{5}{6} \approx 0.8 \text{ км/с}.$$

Комментарии к оцениванию:

Итоговый вывод о том, что скорость кометы близка к нулю, приводит и к снижению оценки практически до нуля. Он, конечно, верен, но одновременно и совершенно очевиден, и совершенно бесполезен в качестве ответа на вопрос задачи.

П.А. Тараканов

3. В примечаниях к повести Аркадия и Бориса Стругацких «Понедельник начинается в субботу» ее главный герой А.И. Привалов возмущается ошибкой авторов, утверждая, что «Сатурн в описываемый момент времени никак не мог находиться в созвездии Весов». Из текста повести известно, что действие происходит уже после запуска первого искусственного спутника Земли и до 1964 года (года выхода повести). Определите, кто прав — авторы или их персонаж, если известно, что сейчас Сатурн находится в созвездии Водолея.

Решение:

Поскольку Сатурн — внешняя планета, радиус орбиты которой существенно больше радиуса орбиты Земли, то направления на него при наблюдении с Земли и с Солнца отличаются мало, а это означает, что Сатурн (с достаточной для нас точностью) равномерно перемещается по зодиакальным созвездиям с периодом, равным его периоду обращения вокруг Солнца. Этот период можно вспомнить сразу или оценить, зная, что радиус орбиты Сатурна около 10 а.е. Тогда период в годах равен $10^{3/2} = \sqrt{1000} \approx 30$ лет.

1964 год был 60 лет назад. Следовательно, в 1964 году Сатурн находился в том же созвездии, что и сейчас (и мы знаем, что это Водолей). Первый искусственный спутник Земли был запущен в 1957 году, поэтому возможный интервал времени действия — 7 лет, это меньше четверти периода Сатурна. Как следствие, Сатурн в 1957–1964 годах должен был находиться на расстоянии не более четверти окружности от Водолея, а созвездие Весов находится в почти диаметрально противоположном направлении. Поэтому описанная ситуация действительно невозможна, и А.И. Привалов прав.

Комментарии к оцениванию:

Вывод о приблизительно равномерном движении Сатурна по небу оценивался 2 баллами. Оценка периода обращения Сатурна — 2 балла. Знание года запуска первого ИСЗ — 1 балл. Вывод о том, в каком созвездии находился Сатурн в 1957 году — 2 балла (1 балл ставится за вычисление смещения Сатурна, но без описания того в каком созвездии был Сатурн). Итоговый ответ — 1.

Попытка вместо возможного диапазона дат рассмотреть только какую-нибудь одну (среднюю, «круглую», какой-то из краев диапазона) при прочих равных снижает итоговую оценку на 2 балла.

Если в работе сказано, что Сатурн бывает во всех созвездиях не в течении периода обращения Сатурна, то в таком случае работа оценивается не более чем 2 баллами.

П.А. Тараканов

4. Широко известно, что вампиры не выносят солнечный свет. Предположим, что на них аналогичным образом действует и солнечный свет, рассеянный Луной, если последняя достаточно яркая. Оцените среднюю долю времени, пригодного для существования вампира в некоторой точке Земли без учета рельефа и облачности, если в течение 6 суток в окрестности новолуния Луна недостаточно яркая, чтобы действовать на вампира.

Решение:

Начнем с рассмотрения какого-то одного из источников вредного для вампира освещения — например, Солнца — причем для начала мы будем считать источник точечным, а рефракцию — отсутствующей. Из соображений симметрии можно заключить, что на достаточно большом интервале времени интересующее нас место на Земле с вероятностью 1/2 окажется в полушарии, повернутом к источнику, и с вероятностью 1/2 — нет.

Тогда на первый взгляд ответ получить просто. Поскольку периоды обращения Луны вокруг Земли и Земли вокруг Солнца, как говорят, несоизмеримы — у них нет небольшого общего кратного — то вероятность того, что на небе одновременно не окажется ни Луны, ни Солнца, равна $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$. Однако требуется учесть еще одно обстоятельство: наличие фаз у Луны.

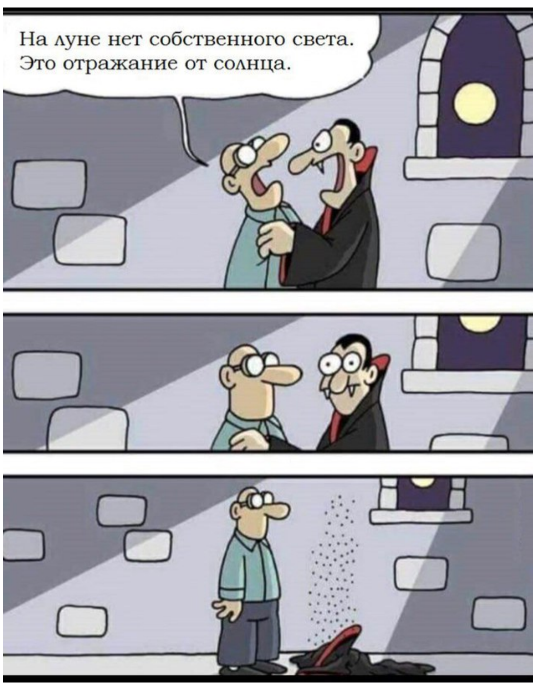
Сделать это можно несколькими различными способами, опишем один из них. Поскольку средний синодический месяц составляет 29.53 суток, а единственное численное данное в условии дано с точностью до целых суток, округлим продолжительность синодического месяца до 30 суток и отметим, что 4/5 месяца Луна представляет опасность для вампира, а 1/5 — нет. Проведем рассуждения, аналогичные предыдущим, для каждого из этих случаев в отдельности.

В течение 4/5 синодического месяца вампир будет существовать 1/4 долю времени. В оставшуюся 1/5 месяца влиять на него будет только Солнце, поэтому там он сможет существовать 1/2 долю времени. Поэтому суммарная доля времени, пригодного для существования вампира, составит

$$\frac{4}{5} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} = 0.3.$$

Осталось аккуратно обработать некоторые детали, не учтенные в решении. Участники, знакомые с понятием вероятности сложного события, могут задуматься, например, над вопросом, будет ли верно утверждение, что при достаточно большой фазе Луны (в течение 4/5 синодического месяца) вероятность для Луны оказаться над горизонтом при Солнце под горизонтом равна именно 1/2. На самом деле это действительно не так, но учет этого обстоятельства приведет к сравнительно малой поправке в итоговом ответе, получение которой с учетом точности исходных данных не имеет смысла. По той же причине бессмысленно учитывать протяженность дисков Луны и Солнца, а также рефракцию: это чуть увеличит вероятность обнаружения каждого из объектов над горизонтом (и осложнит существование вампиру), но отклонение соответствующих величин от 1/2 будет малым.

Таким образом, доля времени, пригодного для существования вампира — около 1/3. Возможно, правда (как на картинке снизу, послужившей поводом для придумывания задачи), что вампиры, не знающие об этом, могут существовать и дольше…



Комментарии к оцениванию:

Одна из наиболее типовых (к сожалению) ошибок: полный неучет существования Солнца. Последующие попытки более или менее аккуратного учета фазы Луны приводили к получению оценки, не превышающей 4 балла. Решение, в котором, наоборот, игнорировалось существование у Луны фаз (с ответом 1/4) также оценивалось не более чем 4 баллами.

Не менее типичная проблема — невнимательное чтение вопроса задачи. Те, кто вместо средней доли времени оценивал максимальное время, которое вампир может провести на поверхности Земли, в случае правильного решения этой, вообще говоря, более сложной задачи получали 2 балла (однако мало кто из решавших задачу в такой постановке смог сделать что-то содержательное).

Участники, занявшиеся подсчетами освещенности, создаваемой на поверхности Земли Луной в разных фазах, не получали за это ничего (вне зависимости от степени успешности такой оценки) — к ответу на заданный в задаче вопрос это не имеет никакого отношения.

П.А.Тараканов

5. У астронома-любителя есть фотоаппарат с ПЗС-матрицей с квадратными пикселями, а также несколько объективов с различными фокусными расстояниями. В один из солнечных дней 2023 года он решил понаблюдать пятна на Солнце. Оцените наименьшее возможное фокусное расстояние объектива, с которым на фотографии удастся зарегистрировать пятна на Солнце. Можно считать, что пятно станет заметным, если займет на снимке площадь не менее 4×4 пикселя. Общее количество пикселей камеры — 30 миллионов. Линейные размеры матрицы 36×24 мм.

Решение:

Характерный диаметр хорошего солнечного пятна в период активности Солнца (2023 год к нему относится) около двух диаметров Земли, $d = 2D_{\oplus}$. При этом диаметр Солнца $D = 110D_{\oplus}$. Тогда

$$\frac{D}{d} = 55.$$

Найдем линейный размер одного пикселя матрицы l из условия, что

$$l^2 = \frac{a \cdot b}{N},$$

где a и b — линейные размеры матрицы, N — число пикселей. Тогда

$$l = \sqrt{\frac{a \cdot b}{N}} \approx 6 \cdot 2 \cdot 0.45 \cdot 10^{-3} = 5.4 \cdot 10^{-3} \text{ мм}.$$

Мы знаем, что угловой диаметр Солнца $= 0^\circ.5$, тогда угловой диаметр пятна будет в $D/d = 55$ раз меньше.

Отношение площади изображении пятна на матрице ко всей площади матрицы будет точно таким же, как отношение угловой площади пятна к площади углового обзора при данном фокусном расстоянии F. Угловую площадь поля в квадратных радианах можно вычислить как $\frac{a}{F} \cdot \frac{b}{F}$ (поскольку углы небольшие).

Составим пропорцию, переведя диаметр Солнца из градусов в радианы и учитывая, что минимальная площадь пятна составляет 16 пикселей:

$$\frac{16 \cdot l^2}{a \cdot b} = \frac{\pi \cdot \frac{0.5^2}{4} \cdot \pi^2 \cdot \left(\frac{d}{D}\right)^2}{180^2 \cdot \frac{a}{F} \cdot \frac{b}{F}}.$$

С помощью несложных преобразований получаем:

$$F = \sqrt{\frac{16 \cdot l^2 \cdot 4 \cdot (\frac{D}{d})^2 \cdot 180^2}{\pi^3 \cdot 0.5^2}} = \frac{4 \cdot l \cdot 2 \ \ \cdot (\frac{D}{d}) \cdot 180}{\pi^{3/2} \cdot 0.5} = \frac{4 \cdot 5.4 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \ \ \cdot 2 \ \ \cdot 55 \cdot 180}{\pi\sqrt{\pi}} \approx 150 \text{ мм.}$$

Комментарии к оцениванию:

Упомянем наиболее часто встречавшиеся случаи оценивания. 8 баллов: разумная оценка радиуса или диаметра пятна привела к правильному ответу. Наиболее подходящая оценка $d = D_\oplus$ или $R = R_\oplus$, что давало в ответе $250 \div 300$ мм. 7 баллов: ответ около 100 мм из-за оценки размера пятна как $\frac{1}{10}R_\oplus$. 6 баллов: есть нечеткие вычисления, задача решена в основном правильно, но при большой оценке размера пятна получалось относительно маленькое фокусное расстояние или наоборот.

2 балла: нахождение площади пятна на матрице, нахождение размера пикселя. 3 балла: как и 2, но есть оценка радиуса пятна. 4 балла: как и 2, но оценка радиуса пятна корректна. 5 баллов: как и 4, но ответ от 40 до 100 мм или просто сколько-нибудь правдоподобный.

Просто за попытку как-то оценить радиус пятна ставилось до 2 баллов в зависимости от корректности, даже если итоговый ответ не получен.

Некоторые писали, что радиус пятна равен $\frac{1}{10}R_\odot$, что реально разве что для групп пятен. Встречалось даже пятно размером $\frac{1}{2}R_\odot$.

Н.А.Ионова