# XVIII Санкт-Петербургская астрономическая олимпиада

**теоретический тур, решения**

**2011**

**12 марта**

---

## *9 класс*

---

**1.** Оцените время, которое геостационарный спутник Земли (все время находящийся над одной и той же точкой земной поверхности) проводит в тени Земли. Наличием у Земли атмосферы пренебречь.

**Решение:**

Сначала нужно выяснить, каков радиус орбиты геостационарного спутника. Так как, по определению, это спутник, все время находящийся над одной и той же точкой земной поверхности, то спутник движется по круговой орбите в плоскости экватора Земли, а его период обращения по орбите равен периоду вращения Земли, т.е. 1 суткам. Воспользовавшись 3-м законом Кеплера, сравним движение спутника и Луны вокруг Земли:

$$\left(\frac{a_{☾}}{r}\right)^3 = P_{☾}^2\,,$$

где $r$ — радиус орбиты спутника (в км), $a_{☾}$ — большая полуось орбиты Луны (в км), $P_{☾}$ — период обращения Луны (в сутках). Отсюда получаем, что

$$\frac{a_{☾}}{r} \approx (\sqrt[3]{27})^2 = 9.$$

Так как $a_{☾} \approx 384$ тыс. км, то $r \approx 43$ тыс. км.

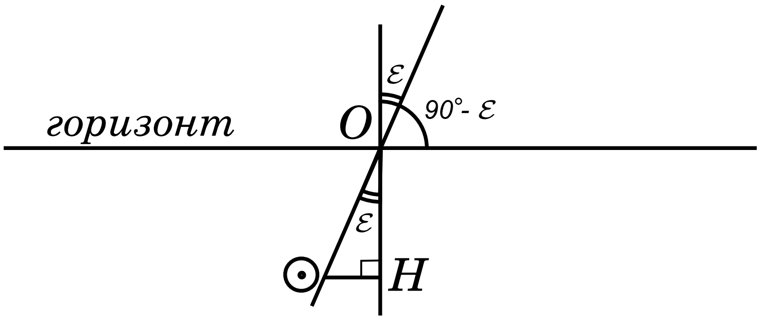
Известно, что на расстоянии орбиты Луны размер земной тени больше размеров Луны (т.к. полные (теневые) лунные затмения довольно продолжительны), а радиус Луны примерно в 4 раза меньше радиуса Земли. Исходя из этого, для оценки размеров земной тени на расстоянии, в 9 раз меньшем размеров лунной орбиты, мы можем приближенно считать тень цилиндром, а не конусом, т.е. предполагать, что размер земной тени равен размеру Земли — примерно 13 тыс. км. Так как ширина тени мала по сравнению с длиной орбиты, для оценки можно считать путь спутника внутри тени отрезком прямой. Длина орбиты спутника равна $2\pi \cdot r \approx 270$ тыс. км. Это путь он проходит за 24 часа. Следовательно, расстояние в 13 тыс. км спутник пройдет примерно за **1.2 часа**.

*Примечание.* Зная размеры Солнца и Земли и расстояние между ними, можно сосчитать размер земной тени на орбите геостационарного спутника более точно, учитывая, что она является конусом. Получим, что ее размер составляет около 97% размера Земли. В оценочной задаче подобной разницей можно (и нужно) пренебречь.

**2.** Гражданские сумерки — это время, когда высота Солнца меняется от $0°$ до $-6°$. Во сколько раз будет отличаться продолжительность гражданских сумерек на экваторе и на тропике Рака в день равноденствия?

**Решение:**

Суточная параллель Солнца в день равноденствия совпадает с экватором. Можно считать, что Солнце движется по ней равномерно. На экваторе Земли небесный экватор расположен вертикально, т.е. под углом $90°$ к горизонту. Следовательно, в день равноденствия на земном экваторе Солнце в течение гражданских сумерек пройдет $6°$ со скоростью $15°$ в час (угловая скорость вращения Земли). На тропике Рака (т.е. северном тропике) небесный экватор наклонен к горизонту под углом $(90° - \varepsilon)$, где $\varepsilon \approx 23°.5$ — угол наклона экватора Земли к эклиптике. Следовательно, для того, чтобы опуститься на высоту $-6°$ под горизонт в день равноденствия на тропике, Солнцу необходимо по своей суточной параллели пройти больший путь (см. рисунок).




Солнце со скоростью 15° в час движется по гипотенузе $O\odot$ прямоугольного треугольника $O \odot H$. Катет $OH = 6°$, отсюда путь, который необходимо пройти Солнцу, равен

$$O\odot = \frac{OH}{\cos\varepsilon} = \frac{6°}{\cos 23°.5} \approx \frac{6°}{0.9}.$$

Таким образом, получаем, что продолжительность гражданских сумерек в день равноденствия на тропике будет больше, чем на экваторе, в

$$\frac{1}{0.9} \approx \mathbf{1.1\,раза}.$$

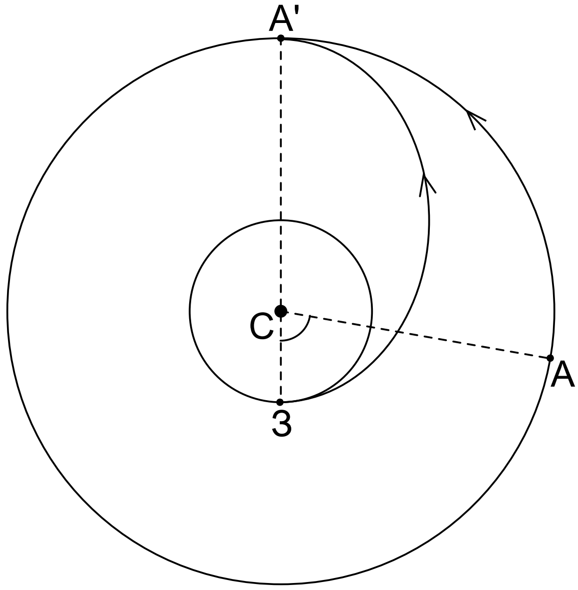
*Примечание.* Оценить $\cos\varepsilon$ можно следующим образом. Известно, что синус малого угла приближенно равен самому углу, выраженному в радианах. Это приближение достаточно хорошо работает вплоть до углов около 30° (можно проверить, что вычисляя таким образом $\sin 30°$, мы ошибаемся примерно на 5%). Пользуясь основным тригонометрическим тождеством, получаем

$$\cos\varepsilon = \sqrt{1 - \sin^2\varepsilon} \approx \sqrt{1 - (0.4)^2} = \sqrt{0.84} \approx 0.9.$$

**3.** С Земли к некоторому астероиду по наиболее экономичной орбите была запущена автоматическая межпланетная станция. На каком угловом расстоянии друг от друга были Земля и астероид при наблюдении с Солнца в момент запуска? Орбиты астероида и Земли считать круговыми и лежащими в одной плоскости. Радиус орбиты астероида равен 3 а.е.

**Решение:**

Наиболее экономичная орбита в случае перелета с Земли на близкорасположенный астероид (так называемый «эллипс Гомана») — эллипс, в перигелии касающийся орбиты Земли, а в афелии — орбиты астероида (см. рисунок). На рисунке С — положение Солнца, З — положение Земли и А — астероида на орбитах во время старта АМС, A′ — положение астероида во время финиша.




Большая полуось такой орбиты

$$a = \frac{r_\oplus + r_A}{2},$$

где $r_\oplus$ — радиус орбиты Земли, а $r_A$ — астероида. Таким образом $a = 2$ а.е. Из 3-го закона Кеплера получаем, что период обращения $P$ (в годах) по такой орбите будет равен

$$P = a^{\frac{3}{2}} = \sqrt{8} \approx 2.8\,\text{года}.$$

Так как АМС нужно пролететь по этой орбите только половину оборота, то перелет займет примерно 1.4 года.

Период обращения астероида по орбите (из 3-го закона Кеплера) (т.е. поворот на 360°)

$$P_A = r_A^{\frac{3}{2}} = \sqrt{27} \approx 5\,\text{лет}.$$

Следовательно, за 1.4 года астероид (при наблюдении с Солнца) повернется на угол

$$\angle\text{ACA'} = \frac{360^\circ}{5} \cdot 1.4 \approx 100^\circ.$$

Таким образом, угловое расстояние между Землей и астероидом в момент старта АМС ($\angle$ЗСА) равно $180^\circ - \alpha \approx \mathbf{80}^\circ$.

**4.** На сколько звездных величин полная Земля, наблюдаемая с Луны, ярче полной Луны, наблюдаемой с Земли? Альбедо Земли в 6 раз больше альбедо Луны.

**Решение:**

Можно считать, что расстояния от Солнца до Земли и до Луны одинаковые, следовательно, одинаково и количество падающего на единицу поверхности солнечного света. А вот количество отраженного света прямо пропорционально площади поверхности и отражающей способности (альбедо). Радиус Луны примерно в 4 раза меньше радиуса Земли. Следовательно, площадь отражающей поверхности Земли примерно в 16 раз больше лунной. Поверхность Земли (точнее, ее атмосфера) отражает свет в 6 раз эффективнее, чем поверхность Луны. Итого, от Земли отражается примерно в $6 \cdot 16 \approx 100$ раз больше солнечного света, чем от Луны. Так как отношению освещенности в 100 раз соответствует разница на 5 звездных величин, полная Земля, наблюдаемая с Луны, ярче полной Луны, наблюдаемой с Земли, примерно **на 5 звездных величин**.

Следует заметить, что полная Луна, наблюдаемая с поверхности Земли, кажется менее яркой, чем на самом деле, из-за поглощения света в земной атмосфере. Поэтому вышенайденная разность будет немного меньше 5 звездных величин. Насколько меньше, зависит от высоты Луны над горизонтом и состояния атмосферы, но, как минимум, примерно на 0.2 звездной величины (поглощение чистой атмосферы в зените). Подобные рассуждения оцениваются дополнительным баллом.

**5.** Как известно, галактики во Вселенной на больших масштабах образуют плоские структуры (по аналогии часто называемые «блинами»). Отдельные «блины» искривляются и пересекаются с другими. С учетом этого опишите качественный характер зависимости числа галактик, находящихся в шаре с радиусом $R$ и центром в нашей Галактике, от радиуса $R$.

**Решение:**

Характер зависимости будет различаться на разных пространственных масштабах. Сначала, когда $R$ достаточно мал (сравним со средним расстоянием между галактиками) какая-либо определенная зависимость не будет выявляться из-за флуктуаций в распределении галактик. Затем, когда $R$ будет существенно больше расстояний между галактиками, но меньше размеров одного «блина», количество галактик будет увеличиваться пропорционально $R^2$ (так как в шар будут попадать галактики из одного «блина», и их количество будет примерно пропорционально площади части «блина», находящейся внутри шара) Затем, когда $R$ станет существенно больше размера одного «блина», галактики будут расположены в пространстве примерно равномерно, и тогда зависимость будет иметь вид $R^3$. На масштабах $R$, близких к размеру одиночного «блина», как и в случае малых $R$, будет наблюдаться «переходный режим», связанный с флуктуациями в расположении различных «блинов» друг относительно друга.

Можно также отметить, что вышеизложенное рассуждение верно в предположении, что мы обладаем полной информацией о всех галактиках. Если же учесть, что в действительности на больших расстояниях существенная часть галактик просто не видна, то в зависимости $R^3$ при увеличении $R$ для наблюдаемых галактик показатель степени будет постепенно уменьшаться, и в итоге с ростом $R$ число галактик практически перестанет меняться. Аналогичный эффект мог бы возникнуть также из-за конечности скорости света и конечности времени существования Вселенной (на ранних стадиях эволюции Вселенной, которые мы видим на больших расстояниях, галактик было меньше), однако на таких расстояниях статистические данные о галатиках крайне неполны, и первый из двух упомянутых эффектов оказывается существеннее.