XVIII Санкт-Петербургская астрономическая олимпиада

теоретический тур, решения

2011

12 марта

---

11 класс

---

1. Вокруг Земли по геостационарной орбите движется спутник-ретранслятор массой 1 тонна. Спутник непрерывно излучает вниз радиоизлучение со средней мощностью 2 кВт. Оцените, насколько (за счет излучения) изменится радиус орбиты спутника за год.

Решение:

Спутник, излучающий вниз, фактически является фотонной ракетой (хотя и с очень малой тягой). За время Δt он испускает энергию $L\Delta t$ (где L — мощность излучения), при этом спутник получает импульс, равный $L\Delta t/c$ (c — скорость света). Следовательно, на спутник действует постоянная по модулю направленная вверх сила, равная $F = L/c$.

Однако на спутник, движущийся по круговой орбите, действует также постоянная по модулю сила, направленная вниз — сила тяготения Земли. Сила F частично компенсирует силу тяготения, однако суммарная сила также будет постоянной и направленной вниз, поэтому спутник, уже находящийся на некоторой круговой орбите, на этой орбите и останется. Следовательно, радиус орбиты **изменяться не будет**. Заметим также, что даже без вычислений очевидно, что сила тяготения намного превосходит силу F (в действительности — на $7 \div 8$ порядков), а это означает, что орбита спутника почти не будет отличаться от геостационарной орбиты для обычного спутника (аккуратный подсчет даст разницу в радиусах орбит около 20 м).

2. На каком расстоянии от Земли должна находиться Луна, чтобы ее невозможно было увидеть во время лунного затмения?

Решение:

Оценим расстояние от Земли, на котором земная тень «заканчивается», т.е. сходится в точку (OE на рисунке №1). Из рисунка №1 (S — Солнце, E — Земля) видно, что, $\triangle\ SOS'$ и $\triangle\ EOE'$ подобны, поэтому

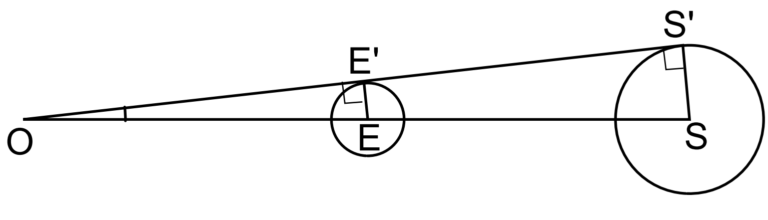

Рис. №1

$$\frac{SS'}{EE'} = \frac{OC}{OE}$$

В то же время, $OS = OE + ES$. Отсюда получаем, что

$$OE = \frac{SE}{\frac{SS'}{EE'} - 1}$$

или (пренебрегая единицей)

$$\frac{OE}{SE} \approx \frac{EE'}{SS'}.$$

Известно, что Земля примерно в 100 раз меньше Солнца, следовательно, земная тень сходится в точку на расстоянии примерно 0.01 а.е. от Земли, что заведомо больше расстояния до Луны. Казалось бы, так как Луна в видимой области спектра светит отраженным светом, она не должна быть видна во время любого полного затмения. Однако во время даже центральных теневых затмений Луна не исчезает полностью, а становится темно-красной. Это связано с тем, что солнечные лучи, идущие по касательной к поверхности Земли, преломляются в ее атмосфере и частично достигают Луны даже внутри тени. Для того, чтобы Луна во время затмений не была видна, она должна находиться ближе к Земле, в той области, где размеры «абсолютной» тени Земли (с учетом рефракции) больше размеров Луны.

Известно, что рефракция у горизонта примерно равна угловому диаметру Луны (или Солнца), т.е. около $0^\circ.5$. Следует учесть, что при прохождении «насквозь» через атмосферу, лучи света испытывают преломление как «на входе» в нее, так и «на выходе», так что результирующее отклонение луча в максимуме может достигатьч примерно 1° ($\angle OE'O'$ на рис. №2).

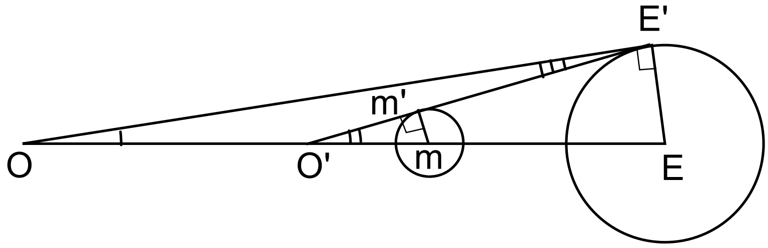

Рис. №2

Нам нужно оценить расстояние mE. Треугольник $Om'm$ — прямоугольный, а $O'E'E$ — нет, так как $\angle O'E'E \approx 89^\circ$, однако при оценке этим можно пренебречь и считать, что для этих треугольников тоже справедливо соотношение

$$\frac{O'm}{O'E} \approx \frac{mm'}{EE'}.$$

Так как Луна примерно в 4 раза меньше Земли, то можно считать, что $mE \approx \frac{3}{4}O'E$.

Оценим $O'E$. $\angle E'O'E = \angle E'OE + 1^\circ$, т.к. угол при вершине E' уменьшился на 1°, а при E — не изменился. $\angle E'OE \approx \frac{EE'}{OE} \approx 4.3 \cdot 10^{-3}$ рад $\approx 14'$ (1 рад $\approx 2 \cdot 10^5$ угл. сек.). Следовательно $\angle E'O'E = 1^\circ 14'$. Считая $\triangle\ O'E'E$ прямоугольным, получим

$$O'E \approx \frac{EE'}{\sin(\angle E'O'E)} \approx \frac{EE'}{\angle E'O'E(\text{в радианах})} \approx \frac{6.4 \cdot 10^3}{2.2 \cdot 10^{-2}} \approx 3 \cdot 10^5 \text{ км}.$$

Отсюда $mE \approx \frac{3}{4} \cdot 3 \cdot 10^5 \approx \mathbf{2.3 \cdot 10^5}$ **км**, т.е., чтобы «исчезать» во время затмений, Луна должна находиться примерно в полтора раза ближе к Земле, чем сейчас.

3. Докажите, что болометрические видимые звездные величины звезд, лежащих в плоскости эклиптики, должны периодически меняться с периодом, равным 1 году. Оцените амплитуду этих изменений. Можно ли зарегистрировать их с использованием существующей наблюдательной аппаратуры?

Решение:

Так как период для всех звезд одинаков, то очевиден вывод, что эффект связан с орбитальным движением Земли. По отношению к звездам, лежащим в плоскости эклиптики, Земля периодически изменяет свое положение и скорость. К каким последствиям это приведет?

Начнем с изменения положения. В течение года расстояние от Земли до некоторой звезды меняется на 2 а.е., что должно приводить к некоторому изменению видимой звездной величины. Оценим сверху величину эффекта, считая, что звезда расположена на расстоянии 1 пк от Солнца (в действительности расстояние до ближайшей звезды 1.3 пк, причем она в плоскости эклиптики не лежит). Так как 1 пк $\approx 2 \cdot 10^5$ а.е., а освещенность, создаваемая звездой, обратно пропорциональна квадрату расстояния до нее, то это означает, что максимальное отклонение освещенности ΔE от среднего значения относится к этому среднему значению E как

$$\frac{\Delta E}{E} = (2 \cdot 10^5)^{-2} \approx 3 \cdot 10^{-11}.$$

Если же звезда находится на расстоянии, большем 1 пк (что, как уже упоминалось выше, всегда выполняется), то $\Delta E/E < 3 \cdot 10^{-11}$.

Теперь учтем изменение скорости. Так как орбитальная скорость Земли примерно равна 30 км/с (что легко получить, зная расстояние от Земли до Солнца и продолжительность года), то периодическое приближение и удаление Земли от звезды будут приводить к периодическому сдвигу спектра звезды за счет эффекта Допплера. Изменение частоты при этом составит $\Delta\nu/\nu = v/c \approx 10^{-4}$. Но, так как энергия кванта света прямо пропорциональна его частоте ($\varepsilon = h\nu$), это означает, что и освещенность, создаваемая звездой, будет отклоняться от среднего значения на такую же относительную величину, т.е. $\Delta E/E \approx 10^{-4}$.

Очевидно, что второй эффект на много порядков превосходит первый и, следовательно, именно он и является определяющим. Выразим его в звездных величинах, воспользовавшись формулой Погсона (где E' — максимально возможное значение освещенности, $E' = E + \Delta E$):

$$\Delta m = -2.5 \lg \frac{E'}{E} = -2.5 \lg \left(\frac{E + \Delta E}{E} \right) = -2.5 \lg \left(1 + \frac{\Delta E}{E} \right) = -2.5 \lg(1 + 10^{-4}).$$

Вычисление результата наиболее просто выполнить следующим образом:

$$\Delta m = -2.5 \lg(1 + 10^{-4}) = -2.5 \frac{\ln(1 + 10^{-4})}{\ln 10} \approx -2.5 \frac{10^{-4}}{2.3} \approx -1.1 \cdot 10^{-4}.$$

Следовательно, полная амплитуда изменения составит около $0.2 \cdot 10^{-3}$ звездной величины. Это меньше характерной точности современной прецизионной фотометрии (10^{-3} звездной величины), поэтому в действительности этот эффект не обнаружвается.

4. Двойная звезда состоит из черной дыры и звезды главной последовательности с одинаковыми массами, равными 3 массам Солнца, которые движутся по круговым орбитам. Известно, что в системе происходит дисковая аккреция. Оцените максимально возможный орбитальный период такой системы.

Решение:

Для того, чтобы в системе возникла дисковая аккреция, необходимо, чтобы одна из компонент (очевидно, что это будет звезда главной последовательности) заполняла свою полость Роша. Так как массы компонент одинаковы, то точка Лагранжа $\mathfrak{L}_1$, в которой соприкасаются полости Роша обеих компонент, будет находиться точно посередине между звездами и, следовательно, звезда главной последовательности должна иметь радиус, близкий к половине расстояния между компонентами.

Запишем обобщенный III закон Кеплера, причем выразим орбитальный период системы P в годах, большую полуось системы a в астрономических единицах, а массы компонент M_1 и M_2 — в массах Солнца. Тогда

$$\frac{P^2}{a^3} = \frac{1}{M_1 + M_2}$$

При этом мы знаем, что максимально возможное значение большой полуоси a (а, следовательно, и максимально возможное значение орбитального периода) получится в том случае, если $a \approx 2R$ (где R — радиус звезды главной последовательности). Поэтому задача сводится к оценке радиуса звезды с массой, равной трем солнечным.

Это можно сделать многими различными способами. Например, вспомнить зависимости «масса–светимость» ($L \propto M^4$) и «радиус–светимость» ($L \propto R^5$) для звезд главной последовательности (вместо второй зависимости можно воспользоваться грубой оценкой эффективной температуры и соотношением между светимостью, температурой и радиусом). В любом случае, так как задача носит оценочный характер и получение точного ответа невозможно по крайней мере в силу неучета особенностей строения звезды, заполнившей свою полость Роша, достаточно понять лишь то, что радиус звезды с ростом массы медленно растет ($R \propto M^\beta$, причем $\beta = 0.5 \div 1$). Отсюда получаем, что радиус нашей звезды примерно в 2 раза больше радиуса Солнца.

Тогда оценка максимального периода становится тривиальной. Вспоминаем (или вычисляем), что радиус Солнца составляет около 1/200 а.е., следовательно, максимальное значение большой полуоси системы — 1/50 а.е. Тогда максимально возможный период

$$P \approx \sqrt{\frac{(1/50)^3}{6}} = \frac{1}{50} \cdot \sqrt{\frac{1}{300}} \approx \frac{1}{850} \text{ года}$$

Переводя результат в более удобные единицы, получаем окончательный ответ — около 10 часов. Погрешность в определении радиуса может изменить результат раза в полтора, но по порядку величины он останется верным.

5. Какую максимальную фазу (отношение площади освещенной части диска к общей площади) может иметь Луна в соединении с Меркурием? Чему при этом будет равна фаза Меркурия? Орбиты Меркурия и Луны считать круговыми и находящимися в плоскости эклиптики, радиус орбиты Меркурия равен 0.4 а.е.

Решение:

Очевидно, что максимальная фаза Луны в соединении с Меркурием будет достигаться в моменты максимальной элонгации Меркурия. Так как нам нужно отношение площади освещенной части к общей площади диска, то элонгация может быть как восточной, так и западной, площади освещенной части в обоих случаях будут одинаковыми.

Оценим максимальную элонгацию Меркурия ε (см. рис. №3). В треугольнике *СЗМ* угол при *М* — прямой, гипотенуза *СЗ* — 1 а.е., катет *СМ* — 0.4 а.е. Отсюда $\sin\varepsilon = 0.4$, т.е. $\varepsilon \approx 23^\circ$.

Очевидно, что в максимальной элонгации фаза Меркурия равна 0.5. У Луны фаза меньше. Оценим ее.

В треугольнике *ЗСЛ* сторона *ЗС* примерно в 400 раз больше стороны *ЗЛ*, так что можно считать, что угол при *С* близок к нулю, а угол при *Л* равен $180^\circ - \varepsilon$. Таким образом, угол, стягивающий сектор, закрашенный черным на рисунке, а, следовательно, и двугранный угол, «вырезающий» часть площади, освещенной Солнцем и видимой с Земли, равен ε (рис. №4а).

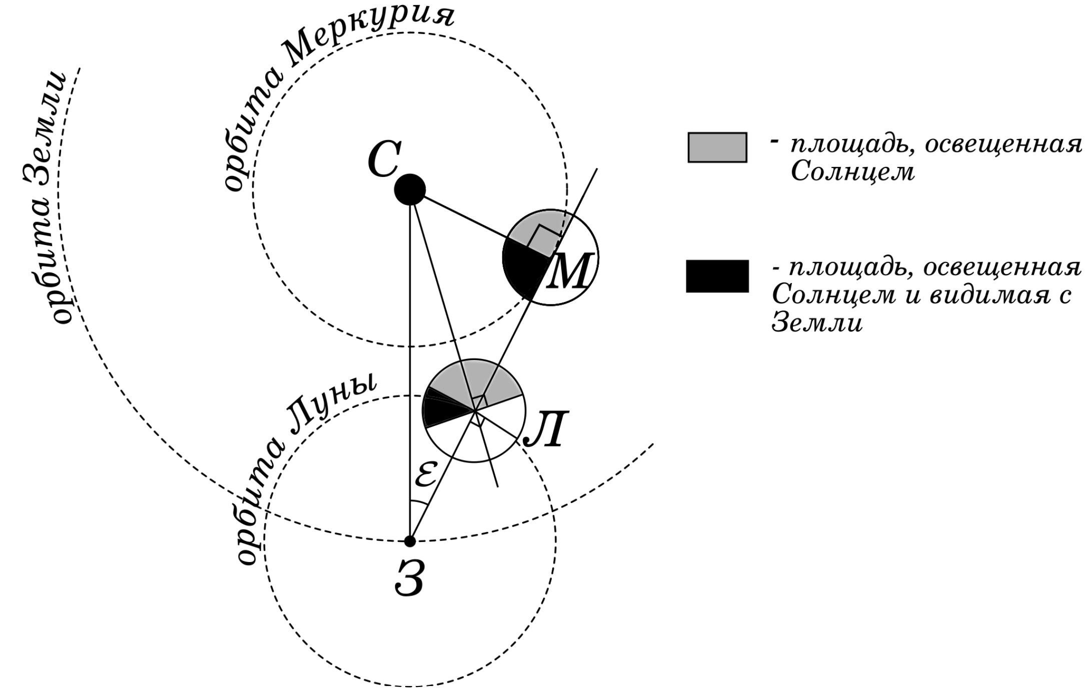

Рис. №3

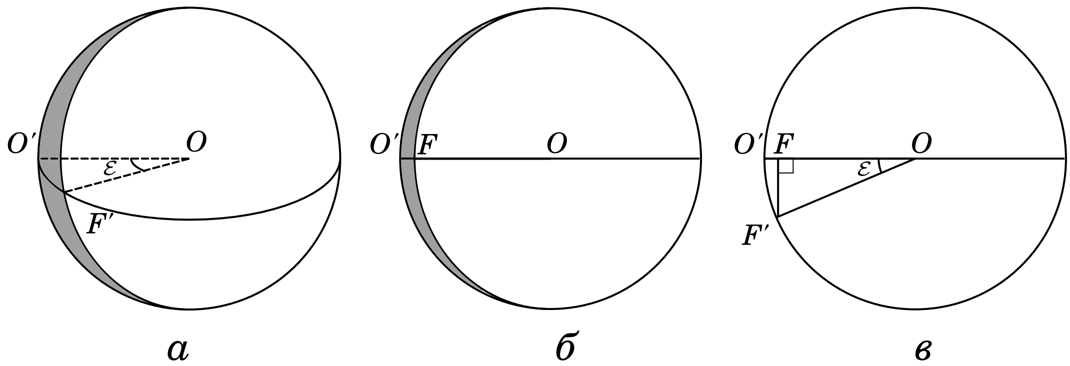

Рис. №4

При проектировании изображения Луны на небесную сферу получится «серп», изображенный на рис. №4б, наибольшая ширина которого $O'F$ определяется как $OO' - OF$ (рис. №4в). $OO' = OF' = R_☾$, где $R_☾$ — радиус Луны.

$$O'F = OO' - OF = OO' - OF' \cos\varepsilon = R_☾ \,(1 - \sqrt{1 - \sin^2\varepsilon}) \approx 0.1 R_☾ \,.$$

Площадь лунного «серпа» — это площадь полукруга минус площадь полуэллипса (проекция окружности — эллипс), разделяющего освещенную и неосвещенную части диска Луны (т.н. «терминатора»). Так как эллипс можно получить из окружности сжатием (как в данном случае) или растяжением одной из осей, то площадь эллипса вычисляется аналогично площади окружности, если заменить радиусы на полуоси. Следовательно площадь эллипса $S = \pi ab$, где a — большая полуось, а b — малая. В данном случае $a = R_☾$, $b = OF = 0.9R_☾$. Таким образом получаем площадь «серпа» (освещенной части):

$$S_{\text{серпа}} = \frac{1}{2}\pi R_☾^2 - \frac{1}{2}\pi R_☾ \cdot 0.9 R_☾ = 0.05\pi R_☾^2 \,.$$

и отношение площади освещенной части диска к общей площади

$$\frac{S_{\text{серпа}}}{S_{\text{диска}}} = \frac{0.05\pi R_☾^2}{\pi R_☾^2} = \mathbf{0.05}.$$