XXXII Санкт-Петербургская Астрономическая олимпиада

теоретический тур, решения

2025

2 февраля

11 класс

1. Известны две компактные массивные эллиптические галактики, причем одна из них имеет космологическое красное смещение $z_1 \approx 3$, а вторая находится в локальной Вселенной (и ее $z_2 \approx 0$). Считая галактики полностью одинаковыми, оцените, во сколько раз отличаются их наблюдаемые болометрические поверхностные яркости.

Решение:

Рассмотрим небольшой участок галактики, высекаемый телесным углом θ^2, где θ — угловой размер участка. Известно, что обычно поверхностная яркость не зависит от расстояния — она выражается как E/θ^2, а и освещенность, создаваемая кусочком объекта, и квадрат его углового размера падают обратно пропорционально квадрату расстояния. На космологических масштабах это рассуждение больше не работает, поскольку в расширяющейся Вселенной само понятие расстояния необходимо определять более аккуратно.

Отношение двух расстояний между одними и теми же двумя точками в расширяющейся плоской Вселенной, измеренные одновременно, в моменты времени t_1 и t_2 можно записать как отношение двух функций времени $\frac{s_1}{s_2} = \frac{a(t_1)}{a(t_2)}$. Применив это же к длине волны фотона, испущенного источником и принятого спустя какое-то время наблюдателем, получим

$$\frac{a(t_1)}{a(t_2)} = \frac{\lambda_{\text{lab}}}{\lambda_{\text{obs}}} = \frac{1}{1+z}.$$

Рассматривая два фотона, испущенные в момент времени t_1 и полученные наблюдателем в момент времени t_2, можно получить, что для заданного θ в формуле углового размера вместо расстояния r необходимо использовать $r_{\text{ad}} = \frac{r}{1+z_1}$ (объект как бы находился ближе, когда мы измеряли угловой размер).

При вычислении освещенности необходимо учесть два эффекта. Во-первых, из-за увеличения длины волны каждого фотона его энергия уменьшится на $(1+z_1)$. Во вторых, изменится частота прихода самих фотонов: упрощая, предположим что объект испускал по одному фотону в Δt, тогда новый интервал будет равен $\Delta t(1+z_1)$. То есть если бы мы хотели использовать ту же формулу для вычисления освещенности, r^2 в знаменателе нужно было бы заменить на $r_L^2 = r^2 \cdot (1+z_1)^2$.

Таким образом, для участка далекого объекта размером l:

$$\frac{E}{\theta^2} = \frac{L}{4\pi^2 r_L^2} \cdot \frac{r_{\text{ad}}^2}{l^2} = \frac{L}{4\pi^2 l^2} \cdot \left(\frac{r_{\text{ad}}}{r_L}\right)^2 = \frac{L}{4\pi^2 l^2} \cdot \frac{1}{(1+z_1)^4}.$$

Для объекта локальной Вселенной $z_2 \approx 0$, поэтому поверхностная яркость оказывается в $(1+z_1)^4 = 4^4 \approx 3 \cdot 10^2$ раз больше.

Тот же результат можно получить несколько менее корректным способом, предполагая, что спектр галактики близок к спектру абсолютно черного тела (что в общем случае все же не совсем верно).

Рассмотрим квадратный участок галактики фиксированного углового размера θ, для удобства заданного в радианах. Если расстояние до галактики равно r, то соответствующий участок имеет линейный размер $l = r\,\theta$.

Пусть температура этого участка равна T. В таком случае участок имеет светимость $L = l^2\,\sigma T^4$ (тут σ — постоянная Стефана-Больцмана) и создает на расстоянии r освещенность

$$E = \frac{L}{4\pi r^2} = \frac{l^2\,\sigma T^4}{4\pi r^2} = \frac{r^2\,\theta^2\,\sigma T^4}{4\pi r^2} = \frac{\theta^2\,\sigma T^4}{4\pi}.$$

Если мы отнесем освещенность к участку единичной угловой площади, мы получим, что поверхностная яркость галактики $\rho = E/\theta^2$ определяется только эффективной температурой соответствующей области, причем $\rho \propto T^4$.

Теперь учтем космологические эффекты. Пока фотоны от галактики летели до наблюдателя, Вселенная расширилась, вследствие чего увеличилась длина волны фотонов:

$$z = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\lambda}{\lambda_0} = 1 + z.$$

Тут λ_0 — длина волны фотона в момент излучения, λ — длина волны фотоны в современную эпоху. Из закона смещения Вина мы знаем, что $\lambda \cdot T = \mathrm{const}$, а это означает, что наблюдаемая (яркостная) температура объекта упала в $1 + z$ раз, и тем самым поверхностная яркость объекта $\rho \propto (1+z)^{-4}$.

Тогда отношение поверхностных яркостей оказывается равным

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \left(\frac{1+z_1}{1+z_2}\right)^4 = 4^4 \approx 3 \cdot 10^2.$$

Отметим также, что, согласно современным моделям образования эллиптических галактик, на начальном этапе эволюции весь доступный газ относительно быстро перерабатывается в звезды и формируется массивный компактный объект — «красный самородок». Дальнейший рост галактики осуществляется за счет слияний с другими объектами. Однако, если слияний не происходит, такой «реликтовый» объект вполне может сохраниться до современной эпохи в изначальном виде, поэтому условие об одинаковости галактик из условия задачи вполне реалистично.

Н.С.Рогов

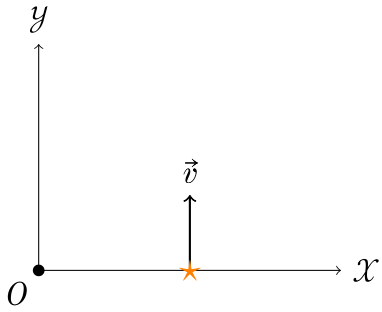
2. Шаровое звездное скопление имеет радиус 20 пк и состоит из 10^6 звезд, похожих на Солнце. В начальный момент времени некоторая звезда находится в 3 пк от центра скопления и движется в направлении, перпендикулярном направлению на центр скопления, со скоростью 10 км/с. Оцените максимальное расстояние от центра скопления, на котором может оказаться звезда, и время (отсчитанное от начального момента), через которое это произойдет. Скопление однородное: концентрация звезд в скоплении всюду одинакова.

Решение:

Сила, которая действует на звезду внутри скопления на расстоянии r от центра, равна

$$\vec{F} = -\frac{GM(r)m}{r^3}\,\vec{r} = -\frac{4}{3}\pi G\rho m\,\vec{r}.$$

Введем в плоскости, в которой движется звезда, систему координат следующим образом:



Компоненты сил вдоль осей $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ равны соответственно:

$$F_x = -\frac{4}{3}\pi G\rho m x,$$

$$F_y = -\frac{4}{3}\pi G\rho m y.$$

Иными словами, $F_x = -kx$ и $F_y = -ky$, где $k = \frac{4}{3}\pi G\rho m$. Таким образом, уравнение движения звезды вдоль каждой оси представляет с собой уравнение гармонического осциллятора. Период колебаний вдоль каждой оси в таком случае равен

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{3}{4\pi G\rho}}.$$

Заметим, что в начальный момент времени координата x звезды ненулевая, а проекция скорости на ось $\mathcal{X}$ равна нулю. Тогда x как функция времени t может быть записана в виде $x = x_0 \cos\omega t$. Наоборот, в начальный момент времени координата y равна нулю, а соответствующая компонента скорости — нет. Аналогичным образом получаем $y = y_0 \sin\omega t$.

Известно, что $x_0 = 3$ пк. Найдем y_0, записав закон сохранения энергии:

$$\frac{mv_y^2}{2} = \frac{ky_0^2}{2} = \frac{2}{3}\pi G\rho m y_0^2.$$

Подставив сюда среднюю плотность скопления $\rho = \frac{3M}{4\pi R^3}$, находим

$$y_0 = \sqrt{\frac{3v_y^2}{4\pi G\rho}} = \sqrt{\frac{3v_y^2 \cdot 4\pi R^3}{4\pi G \cdot 3M}} = \sqrt{\frac{v_y^2 \cdot R^3}{GM}}$$

Вычислять это удобнее всего в системе единиц «астрономическая единица – масса Солнца – год», в которой $G = 4\pi^2$. Учитывая, что 1 пк $\approx 2 \cdot 10^5$ а.е., а 1 а.е./год ≈ 5 км/с, получаем

$$y_0 = \sqrt{\frac{v_y^2 \cdot R^3}{GM}} = \sqrt{\frac{2^2 \cdot (20 \cdot 2 \cdot 10^5)^3}{4\pi^2 10^6}} = \frac{8}{\pi} \cdot 10^6 \text{ а.е.} \approx 13 \text{ пк.}$$

Расстояние от центра до звезды в произвольный момент времени t можно записать как

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x_0^2 \cos^2 \omega t + y_0^2 \sin^2 \omega t},$$

и теперь нам нужно найти максимально возможное значение r.

Это можно делать как минимум двумя путями. Во-первых, стандартным образом исследовать функцию на экстремум (причем можно упростить себе жизнь, заметив, что расстояние r

максимально, когда максимально r^2, и исследовать сразу функцию r^2). Во-вторых, можно догадаться, что полученные выше выражения

$$\begin{cases} x(t) = x_0 \cos \omega t \\ y(t) = y_0 \sin \omega t \end{cases}$$

представляют собой параметрическое уравнение эллипса с осями, ориентированными вдоль осей координат, поэтому экстремальные (и минимальные, и максимальные) расстояния будут достигаться тогда, когда либо $x = 0$, либо $y = 0$, после чего останется выбрать максимум из двух имеющихся вариантов.

Оба рассуждения приведут нас к одному и тому же выводу: максимальное расстояние равно $y_0 \approx 13$ пк, и достигнуто оно впервые будет через четверть периода после начала движения. Осталось сосчитать соответствующее время:

$$t = \frac{T}{4} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{3 \cdot 4\pi R^3}{4\pi G \cdot 3M}} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{R^3}{GM}} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{(20 \cdot 2 \cdot 10^5)^3}{4\pi^2 \cdot 10^6}} = 2 \cdot 10^6 \text{ лет.}$$

С.А.Русаков

3. У красного карлика с массой $0.35\ \mathfrak{M}_\odot$обнаружена планета с массой и средним радиусом как у Земли. Известно, что орбитальный период планеты составляет 6 часов. Оцените отношение минимального и максимального радиусов планеты.

Решение:

Начнем с оценки большой полуоси орбиты планеты, для чего воспользуемся III законом Кеплера в единицах «астрономическая единица – масса Солнца – год». 6 часов — это примерно $1/1500$ часть года, поэтому большая полуось равна

$$a = \sqrt[3]{P^2 \cdot \mathfrak{M}} \approx \left(\frac{0.35}{1500^2}\right)^{1/3} \approx 5 \cdot 10^{-3} \text{ а.е.}$$

Сразу же заметим, что полученное значение максимум в несколько раз превышает радиус звезды, так что орбиту планеты можно считать круговой: орбиты настолько близких к своим звездам планет очень быстро эволюционируют к круговым.

За счет чего планета может оказаться несферической? В столь тесной системе явно имеется приливная синхронизация, так что планета вращается вокруг своей оси с периодом в 6 часов, из-за чего она должна быть сплюснута у полюсов. Но есть и другой фактор: сильнейшее приливное воздействие со стороны звезды, которое должно вытягивать планету вдоль прямой, соединяющей центры звезды и планеты, а заодно сделать плоскости экватора планеты и плоскости ее орбиты вокруг звезды совпадающими. Займемся оценкой этих факторов по очереди, начав с приливного воздействия.

Форма планеты определяется эквипотенциальной поверхностью для суммарного потенциала, в котором находится вещество планеты. В данном случае это гравитационные потенциалы, создаваемые самой планетой и звездой. Обозначим радиус планеты в направлении на звезду как R и запишем условие равенства суммарных гравитационных потенциалов в ближайшей к звезде точке планеты и на полюсе планеты:

$$-\frac{GM}{a-R} - \frac{Gm}{R} = -\frac{GM}{a} - \frac{Gm}{R-\Delta R}.$$

Тут M — масса звезды, m — масса планеты, ΔR — величина, на которую максимальный радиус планеты больше полярного за счет приливного воздействия звезды.

Упрощая и преобразуя выражение, получаем

$$\frac{M}{a-R} - \frac{M}{a} = \frac{m}{R-\Delta R} - \frac{m}{R}$$

и
$$\frac{MR}{(a-R)a}=\frac{m\Delta R}{(R-\Delta R)R}.$$
Поскольку $a \gg R$, то в знаменателе в левой части равенства мы точно можем пренебречь вычитанием R. Предположим также, что $\Delta R \ll R$ и пренебрежем ΔR в знаменателе правой части. Это приведет нас к выражению вида
$$\frac{MR}{a^2}=\frac{m\Delta R}{R^2}.$$
откуда относительное сжатие планеты получается равным
$$\frac{\Delta R}{R}=\frac{M}{m}\left(\frac{R}{a}\right)^2.$$
Масса звезды с хорошей точностью в 10^5 раз больше массы планеты, а большую полуось орбиты a мы можем считать большей R примерно в 10^2 раз — поскольку нас интересует оценка, более высокая точность тут не требуется. Отсюда, подставляя числа, получаем, что $\Delta R/R \approx 10$.

Это совершенно очевидно нелепый результат — получается, что полярный радиус планеты отрицателен, чего не может быть. А тогда мы можем сделать два важных вывода: во-первых, приближение $\Delta R \ll R$ неверно, во-вторых, сжатие планеты за счет вращения, скорее всего, является сравнительно малозначимым фактором на фоне приливного растяжения.

Поэтому вернемся немного назад и откажемся от сделанного ранее приближения. Мы получим уравнение
$$\frac{MR}{a^2}=\frac{m\Delta R}{(R-\Delta R)R}=\frac{m\cdot\delta}{R\,(1-\delta)},$$
где $\delta=\Delta R/R$. Оно при подстановке численных данных превратится в
$$10=\frac{\delta}{1-\delta},$$
откуда $\delta = 10/11 \approx 0.9$, а это означает, что максимальный и минимальный радиусы планеты отличаются в $1/(1-\delta)\approx 10$ раз.

Сделаем несколько заключительных замечаний.

Полученная оценка должна оказаться завышенной: при вычислении гравитационного потенциала планеты мы неявно предполагали, что ее можно считать сферически-симметричной и вычислять потенциал как потенциал точки, расположенной в центре планеты и имеющей массу планеты. Однако при таком отличии формы планеты от сферической подобная оценка явно очень груба. Однако совершенно точно можно сказать, что планета находится буквально на грани приливного разрыва (аккуратное вычисление показывает, что для разрушения планеты большая полуось ее орбиты должна оказаться всего на 8% меньше нынешнего значения).

Как мы уже выяснили выше, сжатием планеты у полюсов за счет вращения можно пренебречь. Однако тот же вывод можно было сделать сразу, вспомнив, как выглядит полость Роша в ограниченной круговой задаче трех тел: фактически именно ее форму в подобной ситуации должна принимать планета.

Вычисление сжатия планеты за счет вращения вокруг оси тут не приводится, поскольку это достаточно стандартная задача. Тем не менее укажем ответ: соответствующая деформация окажется равной $\delta_{\text{вращ}} \approx 3\cdot 10^{-2}$, этот фактор действительно пренебрежимо мал по сравнению с приливным растяжением.

Ну и наконец заметим, что у планеты из этой задачи есть реальный прототип: TOI-6255 b, открытая в 2024 году. Реальная планета несколько больше и массивнее, чем Земля, но также находится «на грани» приливного распада (и, по оценкам, разрушится примерно через $4\cdot 10^8$ лет.

П.А.Тараканов

4. В центральной области туманности вокруг молодой звезды спектрального класса O5 ($T_{\text{O}} = 4 \cdot 10^4$ К) наблюдается область ионизованного водорода (HII). На краю той же туманности находится звезда спектрального класса B2 ($T_{\text{B}} = 2 \cdot 10^4$ К), также окруженная областью HII, угловой размер которой в 2 раза больше углового размера первой области. Оцените, во сколько раз отличаются концентрации водорода в этих областях. Можно считать что характерные температуры областей HII практически одинаковы.

Решение:

В данной задаче нас интересует оценка размера области ионизованного водорода (HII) вокруг горячих OB-звезд, также называемой зоной Стремгрена. В начале XX века Бенгт Стремгрен впервые обосновал, почему мы наблюдаем туманности вокруг горячих звезд, и рассчитал их размер, в этой задаче мы последуем за его работой.

Для начала вспомним, почему вообще возникает области ионизованного водорода. Горячие звезды светят в жестком ультрафиолетовом диапазоне и ионизуют атомы водорода. Таким образом, темп ионизации зависит от того, сколько фотонов с длиной волны меньше 912 Å (и энергией, большей энергии ионизации атомов водорода) испустила звезда за единицу времени. Пусть за одну секунду из звезды вылетает Q фотонов с нужной длиной волны.

В ионизованной среде также могут происходить процессы рекомбинации. Рекомбинация происходит, когда электрон «сталкивается» с протоном, а значит в единице объема число этих процессов пропорциональна произведению концентраций этих частиц $n_e \cdot n_p$.

Это можно также оценить из других соображений. Известно, что среднее время свободного пробега частиц A с частицами B в среде равно:

$$t_A = \frac{1}{n_B \langle \sigma v \rangle},$$

здесь n_B — концентрация частиц B, $\langle \sigma v \rangle$ — среднее значение произведения сечения взаимодействия на скорость частиц. В общем случае последняя величина зависит от температуры среды, однако в условии задачи указано считать, что характерные температуры самих областей HII практически одинаковы, так что эту величину можно считать неизменной. Зная соотношение для времени свободного пробега, можно определить сколько «столкновений» частиц A с частицами B будет происходить за 1 секунду в объеме V:

$$N_{AB} = \frac{n_A V}{t_A} = n_A n_B \langle \sigma v \rangle V\,.$$

В случае задачи частицы A и B — это протоны p и электроны e.

После рассуждений выше становится понятно, что размеры области ионизации определяются балансом между темпом рекомбинации и темпом ионизации $Q = N_{e,p}$. Отсюда получаем практически точно совпадающую с опубликованной Стремгреном формулу для радиуса зоны Стремгрена:

$$n_e n_p \langle \sigma v \rangle \frac{4}{3} \pi r_S^3 = Q \Rightarrow r_S = \left(\frac{3Q}{4\pi n^2 \langle \sigma v \rangle} \right)^{1/3} \propto (Q n^{-2})^{1/3}.$$

Здесь мы считаем, что газ полностью ионизован, поэтому концентрации протонов и электронов совпадают $n_e = n_p = n$. Для ответа на вопрос задачи достаточно получить правильную пропорцию.

Осталось оценить величину Q, точнее найти, чему эта величина пропорциональна. Будем предполагать излучение звезд чернотельным. Тогда число фотонов с длиной волны λ, меньшей λ_0, которые вылетают из звезды, можно найти как интеграл от энергетического спектра (задаваемого формулой Планка), поделить на энергию фотона и умножить на площадь поверхности звезды:

$$Q = 4\pi R^2 \int\limits_{\nu_0}^{\infty} \frac{B_\nu}{h\nu}\, d\nu \propto R^2 \int\limits_{\nu_0}^{\infty} \nu^2 \exp\Big(-\frac{h\nu}{kT}\Big) d\nu \propto T^3 \int\limits_{x_0}^{\infty} x^2 e^{-x}\, dx =$$

$$= R^2 T^3 (x_0^2 + 2x_0 + 2) e^{-x_0} = \begin{cases} 0.48 \cdot R^2 T^3, & T = 4 \cdot 10^4 \text{ К} \\ 0.03 \cdot R^2 T^3, & T = 2 \cdot 10^4 \text{ К} \end{cases}$$

Здесь $x_0 = \dfrac{hc}{\lambda_0 kT} = \dfrac{1.6 \cdot 10^5}{T}$, если температура задана в кельвинах. Для первой звезды эта величина примерно равна 4, для второй — 8. Мы применили тут приближение Вина, которое хорошо аппроксимирует формулу Планка в коротковолновой (высокочастотной) области спектра и в окрестности максимума.

Без численных коэффициентов эту величину можно было оценить, зная что полная энергия, излучаемая 1 м^2 поверхности звезды за единицу времени, равна σT^4, а характерная энергия фотона пропорциональна T (что следует из закона смещения Вина), тогда полное число фотонов выходящих из звезды $Q \propto R^2 T^3$.

Осталось оценить зависимость «температура-радиус» для звезд Главной последовательности. Для этих звезд известно соотношение светимость-радиус и, используя закон Стефана-Больцмана, можно получить искомую зависимость:

$$L \propto R^5 \quad \Rightarrow \quad R^3 \propto T^4.$$

Значит полное число фотонов вылетающих из звезды за данное время для этих двух звезд пропорционально

$$\begin{cases} 0.48 \cdot T^{17/3}, T = 4 \cdot 10^4 \text{ К} \\ 0.03 \cdot T^{17/3}, T = 2 \cdot 10^4 \text{ К} \end{cases}$$

Теперь осталось приравнять темп ионизации и темп рекомбинации и взять их отношение для обеих звезд:

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{n_1^2 r_1^3}{n_2^2 r_2^3} \Rightarrow \frac{0.48 \cdot T_1^{17/3}}{0.03 \cdot T_2^{17/3}} = \frac{n_1^2 r_1^3}{n_2^2 r_2^3}.$$

Подставляя данные, получаем

$$16 \cdot 2^{17/3} = \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \cdot \frac{1}{8},$$

откуда

$$\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 = 2^{12.67}$$

и $n_1/n_2 \approx 80$. Более грубая оценка, без интегрирования приближения Вина, даст отношение, примерно равное 20.

В.Д.Зозуля

5. В нейтронной звезде могут возбуждаться колебания, характеризующиеся циклической частотой ω и числом m, определяющим зависимость свойств этих колебаний от азимутального угла ϕ. Колебания могут приводить к излучению гравитационных волн, при этом темп потерь момента импульса $\dot{J}$ и потерь полной энергии системы $\dot{E}$ связаны соотношением

$$\dot{E} = -\frac{\omega}{m}\dot{J}.$$

Считая, что энергию звезды, вращающейся с угловой скоростью Ω, можно представить как сумму вращательной энергии и энергии, связанной с колебаниями, найдите условие, при котором излучение гравитационных волн будет приводить к раскачке колебаний. Ответ должен быть выражен через переменные m, ω и Ω.

Решение:

Запишем выражение для полной энергии:

$$E = E_r + E_o,$$

где E_r — энергия вращения, E_o — энергия колебаний. Неустойчивость возникает, когда колебания увеличиваются, то есть когда $\dot{E}_o > 0$ (производная энергии колебаний по времени больше нуля). При этом

$$\dot{E} = \dot{E}_r + \dot{E}_o.$$

Запишем энергию вращения E_r как

$$E_r = \frac{I\Omega^2}{2},$$

где $I = \frac{J}{\Omega}$ — момент инерции тела. Тогда:

$$\dot{E}_r = I\Omega\dot{\Omega} = \Omega\dot{J} = -\frac{\Omega m}{\omega}\dot{E}.$$

Выразим теперь из первого уравнения производную энергии колебаний и соберем все вместе:

$$\dot{E}_o = \dot{E} - \dot{E}_r = \left(1 + \frac{\Omega m}{\omega}\right)\dot{E}.$$

Так как полная энергия уносится из системы гравитационными волнами, то знак $\dot{E} < 0$. Поэтому для выполнения условия $\dot{E}_o > 0$ необходимо $1 + \frac{\Omega m}{\omega} < 0$. Мы получили тем самым так называемый «критерий неустойчивости Чандрасекара-Фридмана-Шутца».

А.И.Чугунов