XXII Санкт-Петербургская астрономическая олимпиада

теоретический тур, решения

2015

28 февраля

---

11 класс

---

1. На небе есть много звезд с названиями «ε такого-то созвездия». Оцените среднюю видимую звездную величину таких звезд.

Решение:

Как известно, на небе всего 88 созвездий, и в подавляющем большинстве случаев звезды в них обозначены греческими буквами в порядке убывания их блеска (исключения из этого правила существуют, но в среднем оно выполняется). Поскольку ε — пятая по счету буква греческого алфавита, это означает, что нас интересуют звезды, занимающие на всем небе по блеску места примерно от $88 \cdot 4 \approx 350$ до $88 \cdot 5 = 440$.

Дальнейшее решение использует утверждение, изложение которого с некоторыми купюрами мы позаимствуем из решения одной из задач XXI Санкт-Петербургской астрономической олимпиады.

Пусть функция $N(m)$ — это количество звезд на небесной сфере ярче звездной величины m. Предположим, что все звезды распределены в пространстве равномерно и имеют строго одну и ту же светимость. Освещенность, создаваемая звездой $m+1$ величины, меньше освещенности, создаваемой звездой величины m, в $10^{2/5} \approx 2.512\ldots$ раза по определению понятия звездной величины. Поскольку все звезды по предположению имеют одинаковые светимости, то освещенности, создаваемые ими, обратно пропорциональны квадрату расстояния до них. Тогда предельные расстояния, на которых мы будем наблюдать звезды величин m и $m+1$ (обозначим их $r(m)$ и $r(m+1$ соответственно), относятся как

$$\frac{r(m+1)}{r(m)} = 10^{1/5}.$$

Объемы шаров пропорциональны кубам радиусов и, так как звезды расположены в пространстве равномерно, получается, что

$$\frac{N(m+1)}{N(m)} = 10^{3/5} = \sqrt[5]{1000} \approx \sqrt[5]{1024} = 4.$$

Таким образом, можно сказать, что

$$N(m) = N(0) \cdot 4^m,$$

причем m в данном случае — показатель степени, а не индекс, обозначающий звездную величину.

Насколько правдоподобно полученное нами выражение?

Распределение звезд в пространстве можно считать приблизительно равномерным. На больших расстояниях от Солнца (сравнимых с высотой диска Галактики, т.е. порядка 1 кпк) это предположение будет нарушаться, однако это будет существенно только для очень слабых звезд (с большой видимой звездной величиной). Так что можно считать, что мы получили правдоподобную (возможно, несколько завышенную для самых слабых наблюдаемых звезд) оценку.

Звезды имеют, разумеется, разную светимость. Однако на итоговый результат это никак не влияет. Мы можем разделить все звезды на много отдельных классов так, чтобы в пределах каждого класса светимость звезд была примерно одинаковой. Для каждого отдельного класса полученное выше выражение для $N(m)$ вполне пригодно, а затем мы просто сложим все получившиеся выражения. Результат окажется таким же по структуре, но пригодным для звезд различной светимости.

Наконец, мы совершенно не учли межзвездное поглощение. Оно вносит в целом такую же поправку, как и уменьшение средней концентрации звезд на больших расстояниях, однако, поскольку среднее межзвездное поглощение в окрестности Солнца составляет около 1^m/кпк, эта поправка также будет невелика.

Тем самым мы доказали утверждение, известное в астрономии как теорема Зеелигера: $N(m+1)/N(m) \approx 4$ (точнее, 3.98, хотя для решения данной задачи это несущественно).

Нам нужно из каких-либо соображений оценить $N(0)$. С одной стороны, это попросту количество звезд от -1^m до 0^m. Все звезды ярче нулевой звездной величины известны (Сириус, Канопус, Арктур), причем Сириус ярче и -1^m, так что $N(0) = 2$. С другой стороны, ясно, что для малого числа звезд случайные отклонения $N(0)$ могут оказаться достаточно заметными, поэтому надежнее вспомнить, что $N(6) \approx 6 \cdot 10^3$. Тогда $N(0) = 6 \cdot 10^3/4^6 \approx 1.5$, так что случайные отклонения не так уж велики.

В результате мы получаем, что число звезд ярче звездной величины m приблизительно равно $N(m) \approx 1.5 \cdot 4^m$. Для звезд ε искомая оценка звездной величины — это m, удовлетворяющая уравнению

$$1.5 \cdot 4^m \approx 400.$$

Несложно показать (хотя бы простым подбором), что $m \approx 4$, это и есть ответ задачи.

2. Как известно, черные дыры должны «испаряться» со временем, причем испускаемое ими излучение является чернотельным, а длина волны, соответствующая максимуму интенсивности в спектре излучения, равна гравитационному радиусу черной дыры. Оцените время, которое пройдет между моментом, когда светимость черной дыры окажется равной светимости Солнца, и моментом, когда черная дыра полностью «испарится». В каком спектральном диапазоне электромагнитного излучения будет в основном излучать дыра в тот момент, когда ее светимость равна солнечной?

Решение:

Поскольку черная дыра (ЧД) является абсолютно черным телом, то ее светимость может быть вычислена по известной формуле

$$L = 4\pi\sigma R^2 T^4,$$

где R — радиус ЧД, T — температура ЧД, σ — постоянная Стефана-Больцмана. Воспользуемся законом смещения Вина и напишем, что $R = \beta/T$ (тут β — константа, ее конкретное значение нам не понадобится). Также известно, что радиус R и масса ЧД M связаны соотношением

$$R = \frac{2GM}{c^2},$$

где G — гравитационная постоянная, c — скорость света в вакууме.

Отсюда получаем, что

$$T = \beta\frac{c^2}{2GM}$$

и

$$L = 4\pi\sigma\beta^2 T^2 = \frac{\pi\sigma\beta^4 c^4}{G^2} \cdot M^{-2}$$

Обозначим для удобства $\frac{\pi\sigma\beta^4 c^2}{G^2} = \varkappa$. Тогда

$$L = \varkappa c^2 \cdot M^{-2}.$$

Поскольку за малое время Δt ЧД теряет энергию $L \cdot \Delta t$, то изменение ее массы за это же время можно записать как $\Delta M = -L \cdot \Delta t / c^2$. Отсюда получаем, что

$$\Delta M = -\varkappa M^{-2} \Delta t.$$

Начальное значение массы ЧД M_0 вычисляется из условия, что ее светимость равнялась светимости Солнца $L_\odot$, поэтому

$$M_0 = \sqrt{\frac{\varkappa c^2}{L_\odot}}.$$

Далее можно решать задачу двумя путями. Те, кто умеет решать простейшие дифференциальные уравнения, могут от малых приращений перейти к дифференциалам и решить уравнение

$$dM = -\varkappa M^{-2}\, dt.$$

Отсюда

$$M^2\, dM = -\varkappa\, dt$$

и

$$\int\limits_{M_0}^{0} M^2\, dM = -\int\limits_{0}^{\tau} \varkappa\, dt,$$

где τ — время полного испарения дыры. Отсюда

$$\frac{M_0^3}{3} = \varkappa\, \tau$$

и

$$\tau = \frac{M_0^3}{3\varkappa}.$$

Те, кто не умеет это делать, могут воспользоваться сравнительно грубой оценкой и посчитать время Δt, за которое масса ЧД уменьшится до нуля — т.е. подставить в качестве $\Delta M = -M_0$. Полученный таким образом ответ будет в три раза больше предыдущего, но для порядковой оценки результата этого достаточно.

Теперь найдем длину волны, на которой будет наблюдаться максимум в спектре излучения исходной ЧД. Она по условию равна гравитационному радиусу массы M_0, т.е.

$$\lambda_{\max} = \frac{2GM_0}{c^2}.$$

Займемся получением численных ответов. Поскольку в результаты входят постоянная Стефана-Больцмана и константа из закона смещения Вина (значения которых обычно мало кто помнит), постараемся избавиться от них. Заметим, что $L_\odot = 4\pi\sigma R_\odot^2 T_\odot^4$, где $R_\odot$ — радиус Солнца, а $T_\odot$ — его эффективная температура, поэтому

$$\pi\sigma = \frac{L_\odot}{4R_\odot^2 T_\odot^4}$$

Кроме этого, если $\lambda_\odot$ — длина волны, соответствующая максимуму в спектре излучения Солнца, то $\lambda_\odot = \beta / T_\odot$ и, соответственно, $\beta = \lambda_\odot \cdot T_\odot$. Тогда

$$\varkappa = \frac{\pi\sigma\beta^4 c^2}{G^2} = \frac{L_\odot\, \lambda_\odot^4 \cdot T_\odot^4\, c^2}{4R_\odot^2 T_\odot^4\, G^2} = \frac{L_\odot\, \lambda_\odot^4\, c^2}{4R_\odot^2\, G^2}$$

Время испарения

$$\tau = \frac{M_0^3}{3\varkappa} = \left(\frac{\varkappa c^2}{L_\odot}\right)^{3/2} \cdot \frac{1}{3\varkappa} = \frac{c^3}{3}\sqrt{\frac{\varkappa}{L_\odot^3}} = \frac{c^3}{3L_\odot}\sqrt{\frac{\varkappa}{L_\odot}}.$$

Длина волны максимума излучения

$$\lambda_{\max} = \frac{2G}{c^2}\sqrt{\frac{\varkappa c^2}{L_\odot}} = \frac{2G}{c}\sqrt{\frac{\varkappa}{L_\odot}}.$$

Отсюда видно, что в оба выражения входит

$$\sqrt{\frac{\varkappa}{L_\odot}} = \frac{\lambda_\odot^2\, c}{2R_\odot\, G}.$$

Подставляя этот результат, получаем окончательные выражения, пригодные для вычислений:

$$\tau = \frac{c^4\lambda_\odot^2}{6L_\odot R_\odot G}$$

и

$$\lambda_{\max} = \frac{\lambda_\odot^2}{R_\odot}.$$

Длину волны можно даже не вычислять. Очевидно, что она во столько же раз меньше длины волны максимума в спектре Солнца (который находится в оптическом диапазоне), насколько последняя меньше радиуса Солнца. Совершенно очевидно, что эта длина волны соответствует жесткому гамма-излучению.

Время испарения вычислим, подставив значения в системе единиц СИ:

$$\tau = \frac{(3\cdot 10^8)^4 \cdot (5\cdot 10^{-7})^2}{6\cdot(4\cdot 10^{26})\cdot(7\cdot 10^8)\cdot(7\cdot 10^{-11})} \approx 2\cdot 10^{-5} \text{ секунд.}$$

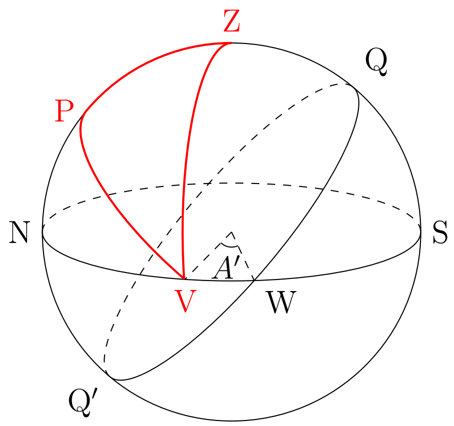
3. Цитата из журнала «Вокруг света»:

> Четыре раза в год в Нью-Йорке можно наблюдать явление, которое с подачи астрофизика Нила ДеГрасса Тайсона названо «Манхэттенхэндж»: закатное Солнце освещает все улицы Манхэттена, идущие с востока на запад. 29 мая 2013 года десятки тысяч горожан и туристов остановились на несколько минут, чтобы полюбоваться этим явлением — и сфотографировать его.

Известно, что широта Нью-Йорка равна 40°, а улицы на Манхэттене расположены под прямым углом друг к другу. Какой угол образуют они с географическими параллелями? Верно ли утверждение, что это явление можно наблюдать четыре раза в год (если речь идет не только о закате, но и о восходе Солнца)? На каких широтах может располагаться город, в котором подобное явление можно наблюдать четыре раза в год?

Решение:

Нарисуем небесную сферу для Манхэттена.



Так как географическая параллель — это направление «восток–запад» (Манхэттен с приемлемой точностью можно считать плоским), то искомый угол — это угол между направлением из центра сферы на точку запада W и точку захода Солнца V — A'. Как нетрудно заметить, это разность азимутов точек W и V. Таким образом задача сводится к нахождению азимута A точки захода Солнца 29 мая на широте $\varphi = 40°$. Рассмотрим сферический треугольник, выделенный красным. Он носит название параллактического треугольника и служит для перевода экваториальных координат в горизонтальные и наоборот. В этом треугольнике:

$$\mathrm{PZ} = 90° - \varphi;$$

$$\mathrm{PV} = 90° - \delta_\odot;$$

$$\mathrm{ZV} = h_\odot = 90°;$$

$$\angle \mathrm{Z} = 180° - A_\odot.$$

Запишем сферическую теорему косинусов для этого треугольника:

$$\cos \mathrm{PV} = \cos \mathrm{PZ} \cdot \cos \mathrm{ZV} + \sin \mathrm{PZ} \cdot \sin \mathrm{ZV} \cdot \cos \mathrm{Z}$$

Подставим значения и преобразуем:

$$\cos A_\odot = -\frac{\sin \delta_\odot}{\cos \varphi}.$$

Известно, что склонение Солнца в некоторый день можно оценить по формуле:

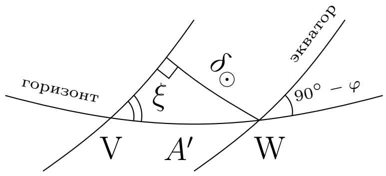
$$\delta_\odot \approx 23°.5 \cdot \sin d,$$

где d — угол в градусах, численно равный числу дней, прошедших со дня весеннего равноденствия.

В нашем случае $d \approx 70°$, следовательно, $\delta_\odot \approx 22°$. Таким образом, $\cos A_\odot \approx -0.5$, $A_\odot = 120°$, а так как $A_W = 90°$, то $A' = 30°$.

Есть и более простое решение, дающее ответ с приемлемой точностью.

Рассмотрим окрестности точки захода Солнца Z (см. рисунок ниже):



Заметим, что изображенная на рисунке фигура не является сферическим треугольником, т.к. одна из ее сторон — суточная параллель Солнца, которая не является геодезической («прямой») на сфере и, следовательно, не может быть стороной сферического треугольника. Также, соответственно, «угол» ξ и «прямой угол» не являются углами сферического треугольника. Однако склонение Солнца не превосходит $23^\circ.5$, что является достаточно малым углом для того, чтобы можно было считать окрестность точки Z частью плоскости. Тогда можно рассмотреть плоский треугольник, сторона которого WV, выраженная в угловых единицах, будет искомым углом между улицами и географическими параллелями A'. В этом треугольнике угол $\xi = 90^\circ - \varphi$, так как в евклидовом пространстве двугранные углы между плоскостью горизонта и плоскостями, содержащими экватор и параллель, равны между собой. Отсюда:

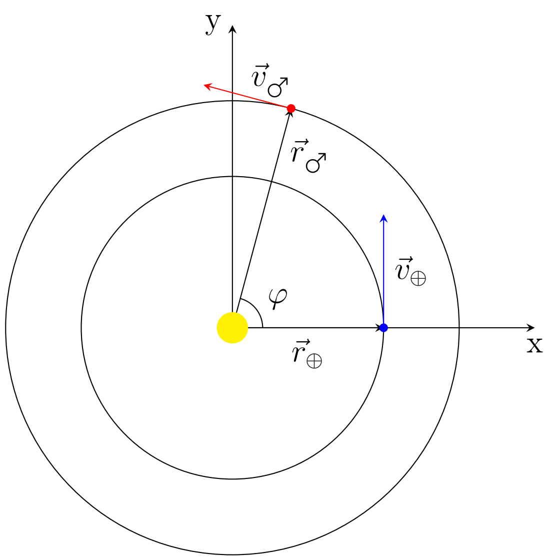
$$A' = \frac{\delta_\odot}{\sin\left(90^\circ - \varphi\right)} \approx 30^\circ.$$

Очевидно, что, когда склонение Солнца будет равно склонению 29 мая (это произойдет в дату, симметричную относительно дня летнего солнцестояния), ситуация с заходом повторится, т.е. закатное Солнце будет освещать улица, идущие с востока на запад. Также очевидно, что через полгода два раза (также симметрично относительно дня летнего солнцестояния) восходящее Солнце будет освещать те же улицы. Такая же ситуация, при удачном расположении улиц, может наблюдаться в городах, расположенных на любых широтах, кроме полярных, т.е. тех, где бывают полярные дни и ночи и, следовательно, один заход и один восход из каждой пары пропадают, т.о. $\varphi \in (-66^\circ.5, 66^\circ.5)$.

4. Найдите максимальное по абсолютной величине значение лучевой скорости Марса при наблюдении с Земли. Орбиту Марса можно считать круговой, радиус орбиты — 1.5 а.е.

Решение:

Напрашивается предположение, что максимальная лучевая скорость Марса будет достигаться в тот момент, когда Марс находится в квадратуре. В этом случае вычисление ответа не представляет сложности, однако само это предположение нуждается в доказательстве. Запишем одно из возможных доказательств.



Рассмотрим декартову систему координат (см.рисунок), в которой ось OX направлена из Солнца через Землю. В этой системе координат радиус-вектор, задающий положение Земли, имеет координаты $\vec{r}_\oplus = (1; 0)$ (в качестве единиц расстояния мы будем использовать астрономические единицы). Если угол между направлениями на Землю и на Марс из Солнца составляет φ, а радиус орбиты Марса равен a, то тогда радиус-вектор Марса $\vec{r}_♂ = a \cdot (\cos\varphi; \sin\varphi)$.

Будем измерять скорости в единицах, равных орбитальной скорости Земли (примерно 30 км/с). Тогда модуль орбитальной скорости Марса $v_♂ = 1/\sqrt{a}$, а вектор орбитальной скорости $\vec{v}_♂ = 1/\sqrt{a} \cdot (-\sin\varphi; \cos\varphi)$ (компоненты вектора можно легко подобрать, зная, что это должны быть косинус и синус угла φ, и выяснив их значения для простых случаев, когда $\varphi = 0°$ или $\varphi = 90°$). Вектор орбитальной скорости Земли просто по построению $\vec{v}_\oplus = (0; 1)$.

Тогда мы можем записать вектор, соединяющий Землю и Марс $\vec{r}_{\oplus♂} = \vec{r}_♂ - \vec{r}_\oplus$, а также вектор относительной скорости Марса относительно Земли $\vec{v}_{\oplus♂} = \vec{v}_♂ - \vec{v}_\oplus$. Интересующее нас значение лучевой скорости — это проекция вектора $\vec{v}_{\oplus♂}$ на прямую, содержащую вектор $\vec{r}_{\oplus♂}$. Ее величину можно вычислить, воспользовавшись тем фактом, что скалярное произведение векторов равно произведению их длин на косинус угла между векторами, а произведение длины $\vec{v}_{\oplus♂}$ на косинус угла между $\vec{v}_{\oplus♂}$ и $\vec{r}_{\oplus♂}$ — это и есть лучевая скорость. Поэтому

$$v_r = \frac{\vec{v}_{\oplus♂} \cdot \vec{r}_{\oplus♂}}{|\vec{r}_{\oplus♂}|}.$$

Отсюда, выписывая скалярное произведение и длину вектора через координаты, получаем

$$v_r = \frac{-\sqrt{a}\,\sin\varphi\cos\varphi + \frac{\sin\varphi}{\sqrt{a}} + \sqrt{a}\,\sin\varphi\cos\varphi - a\,\sin\varphi}{\sqrt{a^2\,\cos^2\varphi - 2a\,\cos\varphi + 1 + a^2\,\sin^2\varphi}}.$$

Поскольку нас интересует максимальное по абсолютной величине значение лучевой скорости, можно вместо v_r рассматривать v_r^2 — максимум у квадрата скорости будет при том же значении φ. Упрощая выражение, получаем

$$v_r^2 = \frac{\left(a - 1/\sqrt{a}\right)^2\,\sin^2\varphi}{a^2 - 2a\,\cos\varphi + 1}.$$

Выразим его как функцию $\zeta = \cos\varphi$

$$v_r^2(\zeta) = \frac{\left(a - 1/\sqrt{a}\right)^2\,(1 - \zeta^2)}{a^2 - 2a\,\zeta + 1},$$

после чего задача сводится к поиску локального экстремума данной функции.

Вычислим производную

$$\frac{dv_r^2(\zeta)}{d\zeta} = \left(a^2 - a\,\sqrt{a} + \frac{1}{a}\right) \cdot \frac{-2\zeta\,(a^2 - 2a\zeta + 1) + (1 - \zeta^2) \cdot 2a}{(a^2 - 2a\zeta + 1)^1}$$

и приравняем ее к нулю. После некоторых очевидных упрощений задача сведется к решению квадратного уравнения

$$\zeta^2 - \frac{a^2 + 1}{a}\,\zeta + 1 = 0.$$

Его корни

$$\zeta_{1,2} = \frac{a^2 + 1 \pm (a^2 - 1)}{2a},$$

однако один из двух корней равен a, он больше единицы (Марс — планета внешняя) и, следовательно, не может быть косинусом какого-либо угла. Остается второй корень $\zeta = 1/a$, поэтому единственный экстремум соответствует условию $\cos\varphi = 1/a$, и он является максимумом, так как на концах области определения функции v_r^2 ее значения равны нулю.

Однако, если внимательно посмотреть на рисунок выше, становится понятно, что мы как раз и доказали, что максимальная линейная скорость будет достигаться тогда, когда Марс находится в квадратуре. Заметим, что аналогичное утверждение будет верно для любой внешней планеты, движущейся по круговой орбите, поскольку в нашем рассуждении мы нигде не использовали конкретное значение радиуса орбиты a.

Осталось вычислить ответ. Подставив найденное значение $\zeta = 1/a$ в выражение для квадрата лучевой скорости, получим

$$v_r^2(\zeta) = \frac{\left(a - 1/\sqrt{a}\right)^2 \, (1 - \zeta^2)}{a^2 - 2a\,\zeta + 1} = \frac{\left(a - 1/\sqrt{a}\right)^2 \, (1 - 1/a^2)}{a^2 - 2 + 1} = \left(\frac{a - 1/\sqrt{a}}{a}\right)^2 =$$

Отсюда

$$v_r = 1 - \frac{1}{a^{3/2}} = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{3/2} = 1 - \sqrt{\frac{8}{27}} \approx 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5},$$

что соответствует примерно 12 км/с (более точное вычисление квадратного корня даст 14 км/с).

5. Оцените ширину рукава Галактики на расстоянии от центра Галактики, равном расстоянию от центра Галактики до Солнца.

Решение:

Концентрация звезд в рукавах спиральных галактик (в том числе и нашей Галактики) достаточно мало отличается от концентрации звезд в межрукавном пространстве. Однако рукава у других спиральных галактик (на которые мы можем посмотреть со стороны) очень хорошо выделяются. Связано это с тем, что в рукавах сосредоточено большинство молодых массивных звезд, которые существенно ярче, чем средняя звезда. Прохождение волны плотности по диску галактики приводит к образованию таких звезд в больших количествах.

Однако время жизни массивных звезд сравнительно мало, оно составляет всего порядка $(10^6 \div 10^7)$ лет (эту оценку можно знать, а можно и получить, зная, что время жизни звезды на главной последовательности обратно пропорционально примерно квадрату или кубу ее массы). Поэтому такие звезды довольно быстро прекращают свое существование, и яркость той области, где находился рукав, становится меньше. Отсюда следует, что если известна скорость движения волны плотности по диску галактики, то ширину рукава можно оценить как произведение этой скорости на характерное время жизни массивных звезд.

Оценка времени у нас уже есть. Осталось вспомнить, что характерная скорость движения спирального узора Галактики в окрестностях Солнца примерно совпадает со скоростью движения Солнца вокруг центра Галактики, а эта величина известна, она равна примерно $2 \cdot 10^2$ км/с. Таким образом, так как время жизни массивных звезд оказывается порядка $(10^6 \div 10^7)$ лет $\times$ ($3 \cdot 10^7$ секунд в году $\sim 10^{14}$ секунд, то ширина рукава будет порядка $2 \cdot 10^{16}$ км, т.е. сотен парсек – килопарсека.

Проверить этот результат (или сразу получить менее точную оценку «по аналогии») можно, вспомнив фотографию какой-либо спиральной галактики, видимой плашмя. Считая, что характерные размеры спиральных галактик (включая нашу) близки, можно сравнить ширину видимых рукавов с размером галактики. Подобная оценка, скорее всего, окажется завышенной (поскольку на большинстве известных фотографий галактик видна их центральная, наиболее яркая часть, диаметр которой заметно меньше диаметра галактики), однако с порядковой точностью результат можно получить и таким путем.