# XIX Санкт-Петербургская астрономическая олимпиада

**теоретический тур, решения**

**2012**

**10 марта**

## *11 класс*

**1.** Максимальная база (расстояние между антеннами) космического радиоинтерферометра «Радиоастрон» составляет 350 тыс. км. Масса черной дыры в центре Галактики составляет $4 \cdot 10^6$ масс Солнца, расстояние до нее — 8 кпк. Определите длину волны, на которой должен вести наблюдения «Радиоастрон», чтобы наблюдаемые угловые размеры черной дыры превышали предельное угловое разрешение радиоинтерферометра.

**Решение:**

Известно, что предельное угловое разрешение интерферометра (в радианах) можно оценить как $\beta = \lambda/D$, где $\lambda$ — рабочая длина волны, $D$ — база интерферометра. Угловые размеры черной дыры в центре Галактики можно получить как $\alpha = 2R/r$, где $R$ — радиус дыры, $r$ — расстояние до нее.

Радиус черной дыры (гравитационный радиус) зависит от ее массы $M$ как

$$R = \frac{2GM}{c^2},$$

где $G$ — гравитационная постоянная, $c$ — скорость света. Это выражение можно получить, считая, что параболическая скорость на поверхности черной дыры равна световой.

Таким образом, условие задачи ($\alpha > \beta$) означает, что:

$$\frac{4GM}{c^2 r} > \frac{\lambda}{D}.$$

Отсюда выражаем

$$\lambda < \frac{4GMD}{c^2 r}$$

и, подставляя численные данные, получаем ответ: $\lambda \lesssim 3$ см.

**2.** В космических гонках участвуют фотонные ракеты массой 10 тонн с мощностью двигателя $1.2 \cdot 10^{13}$ Вт. Определите, какую максимальную скорость сможет развить такая ракета на гонках вокруг Луны, где правилами запрещено удаляться от поверхности более чем на 10 км. Каким образом для этого она должна двигаться?

**Решение:**

Поскольку максимально возможное удаление от поверхности мало, можно считать, что ракета должна двигаться по окружности с радиусом, равным радиусу Луны. Тогда круговая скорость может быть выражена как $v = \sqrt{gR}$, где $R$ — радиус Луны, $g$ — центростремительное ускорение.

Очевидно, что чем больше центростремительное ускорение, тем больше скорость. Поскольку центростремительное ускорение является суммой гравитационного ускорения и проекции ускорения, создаваемого двигателем ракеты, на вертикальную прямую, то для достижения максимальной скорости сопла двигателя должны быть направлены вверх.

Вычислим ускорение, создаваемое двигателем. Поскольку каждый испущенный фотон, имеющий энергию $h\nu$, передает ракете дополнительный импульс $h\nu/c$, то суммарное изменение импульса за единицу времени (т.е. силу тяги двигателя) можно выразить как

$F = \frac{P}{c}$, где $P$ — мощность двигателя, $c$ — скорость света. Отсюда выражаем ускорение, создаваемое двигателем:

$$g_{\text{дв}} = \frac{P}{mc} = \frac{1.2 \cdot 10^{13}}{10^4 \cdot 3 \cdot 10^8} = 4 \text{ м/с}^2.$$

Гравитационное ускорение на поверхности Луны можно оценить, зная, что масса Луны примерно в 80 раз меньше массы Земли, а радиус — примерно в 4 раза меньше. Получаем, что гравитационное ускорение на Луне меньше, чем на Земле, в $80/4^2 = 5$ раз, т.е. оно примерно равно 2 м/с$^2$. Таким образом, полное центростремительное ускорение ракеты может составлять 6 м/с$^2$. Тогда максимальная возможная скорость

$$v = \sqrt{6 \cdot 1.6 \cdot 10^6} \approx 3.1 \cdot 10^3 \text{ м/с} = 3.1 \text{ км/с}.$$

**3.** Давным-давно, в далекой-далекой галактике Уилхуфф Таркин, демонстрируя мощь первой «Звезды Смерти», превысил свои служебные полномочия и уничтожил безоружную и мирную планету Алдераан, двигавшуюся вокруг звезды, похожей на Солнце, по круговой орбите с радиусом 1 а.е. Обломки планеты разлетелись во все стороны со скоростью 1 км/с относительно ее центра. Оцените время, за которое обломки образуют кольцо вокруг звезды.

**Решение:**

Поскольку до уничтожения Алдераан был (по крайней мере, по параметрам орбиты) очень похож на Землю, то его орбитальная скорость совпадала со скоростью движения Земли вокруг Солнца, т.е. была близка к 30 км/с (те, кто не помнит это значение, легко могут его вычислить). Тогда очевидно, что все обломки планеты продолжили двигаться вокруг звезды со скоростями, заключенными в пределах от 29 до 31 км/с. Поскольку в одной и той же точке они имели разные скорости, это означает, что и большие полуоси орбит у них оказались различными, а, следовательно, периоды их обращения вокруг звезды также различаются, причем возможный диапазон периодов можно найти. Именно поэтому обломки будут постепенно растягиваться вдоль орбиты бывшей планеты, и кольцо полностью замкнется тогда, когда обломки, оказавшиеся на орбитах с наименьшим периодом, обгонят обломки, находящиеся на орбитах с наибольшим периодом, ровно на один оборот. Время $T$, необходимое на это, является, вообще говоря, синодическим периодом для двух соответствующих обломков и может быть вычислено из соотношения

$$\frac{1}{T} = \frac{1}{P_{\min}} - \frac{1}{P_{\max}},$$

где $P_{\min}$ и $P_{\max}$ — минимальный и максимальный сидерические периоды обращения обломков вокруг звезды.

Однако реализация намеченного выше алгоритма «в лоб» при отсутствии вычислительной техники будет сравнительно сложной и трудоемкой задачей, поэтому выкладки следует по возможности упростить. Во-первых, вместо того, чтобы переводить все данные в стандартные системы единиц СИ или СГС, воспользуемся системой, в которой единицей длины является астрономическая единица, единицей массы — масса Солнца, а единицей времени — год. Несложно убедиться (записав обобщенный III закон Кеплера для системы «Солнце–Земля»), что гравитационная постоянная в такой системе единиц равна $4\pi^2$. Средняя орбитальная скорость Земли, очевидно, $2\pi$ а.е./год. Во-вторых, учтем то обстоятельство, что изменение скоростей обломков по сравнению с орбитальной скоростью планеты невелико (фактически все обломки продолжат двигаться по орбитам, близким к исходной), что также позволит существенно упростить вычисления.

Как известно, для нахождения скорости в произвольной точке орбиты для задачи одного притягивающего центра можно воспользоваться т.н. «интегралом энергии» (одной из форм записи закона сохранения энергии; соответствующее выражение можно вывести, воспользовавшись также законом сохранения момента импульса для системы из двух гравитирующих тел):

$$v^2 = GM\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right),$$

где $v$ — скорость в некоторой точке орбиты, $G$ — гравитационная постоянная, $M$ — масса притягивающего центра, $r$ — расстояние от него в данной точке орбиты, $a$ — большая полуось орбиты.

Обозначим $\Delta v$ изменение скорости обломка по сравнению с орбитальной скоростью планеты в единицах орбитальной скорости и, воспользовавшись рассмотренной выше системой единиц, запишем соотношение между изменением скорости и малым изменением большой полуоси орбиты $\Delta a$, учитывая, что в точке распада планеты $r = 1$:

$$(2\pi)^2(1+\Delta v)^2 = 4\pi^2 \cdot 1 \cdot \left(2 - \frac{1}{1+\Delta a}\right).$$

Упрощая соотношение, получаем

$$(1+\Delta v)^2 = 2 - \frac{1}{1+\Delta a}.$$

Поскольку $|\Delta a| \ll 1$ и $|\Delta v| \ll 1$, то можно сказать, что

$$(1+\Delta v)^2 = 1 + 2\cdot\Delta v + (\Delta v)^2 \approx 1 + 2\cdot\Delta v,$$

$$2 - \frac{1}{1+\Delta a} \approx 2 - (1-\Delta a) = 1 + \Delta a.$$

Таким образом, получаем, что

$$2\Delta v \approx \Delta a.$$

Аналогичным образом выразим максимальный и минимальный периоды обращения обломков. Перейдем от периода к его изменению по сравнению с орбитальным периодом планеты $P = 1 + \Delta P$ и отметим, что в используемой системе единиц III закон Кеплера может быть записан в виде

$$(1+\Delta P)^2 = (1+\Delta a)^3.$$

Раскрывая скобки, сокращая единицы и пренебрегая малыми слагаемыми (поскольку и $\Delta P \ll 1$), получаем простое соотношение

$$2\Delta P = 3\Delta a,$$

и в итоге изменение периода связано с изменением орбитальной скорости как

$$\Delta P = 3\Delta v.$$

Осталось получить итоговый результат.

$$\frac{1}{T} = \frac{1}{P_{\min}} - \frac{1}{P_{\max}} = \frac{1}{1+\Delta P_{\min}} - \frac{1}{1+\Delta P_{\max}} \approx 1 - \Delta P_{\min} - (1 - \Delta P_{\max}) =$$

$$= \Delta P_{\max} - \Delta P_{\min} = 3(\Delta v_{\max} - \Delta v_{\min}) = 3\left(\frac{1}{30} + \frac{1}{30}\right) = \frac{1}{5}$$

Следовательно, время образования кольца — примерно 5 лет.

Для сравнения (чтобы можно было лучше оценить ценность использованных упрощений) приведем ответ, получающийся при «лобовом» решении задачи:

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{GM}\left(\left(\frac{2}{r} - \frac{\left(\sqrt{\frac{GM}{r}} - v_0\right)^2}{GM}\right)^{3/2} - \left(\frac{2}{r} - \frac{\left(\sqrt{\frac{GM}{r}} + v_0\right)^2}{GM}\right)^{3/2}\right)},$$

где $v_0$ — скорость разлета обломков относительно центра планеты. Если вооружиться калькулятором и подставить в это выражение достаточно точные числовые данные, получится результат, мало отличающийся от уже известного нам — 4.968 лет.

**4.** Солнечная система движется со скоростью 600 км/с относительно реликтового фонового излучения. С какой абсолютной погрешностью требуется уметь измерять температуру реликтового фонового излучения, чтобы заметить это движение?

**Решение:**

Реликтовое излучение является чернотельным с температурой около 2.7 K. При движении относительно реликтового фона спектр излучения сдвигается за счет эффекта Допплера и, как следствие, меняется его температура.

Воспользуемся для оценки температуры положением максимума в спектре излучения. Известен закон смещения Вина — частота максимума в спектре пропорциональна температуре излучения, $\nu_{\max} \propto T$. Тогда изменение частоты максимума пропорционально изменению температуры, $\Delta\nu_{\max} \propto \Delta T$, причем с тем же коэффициентом.

Запишем формулу нерелятивистского (скорость мала по сравнению со скоростью света $c$) эффекта Допплера для частот:

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{v}{c}.$$

Отсюда

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{v}{c} = \frac{600}{300\,000} = 0.002,$$

и, следовательно, требуемая точность измерения температуры $\Delta T \approx 5 \cdot 10^{-3}$ K.

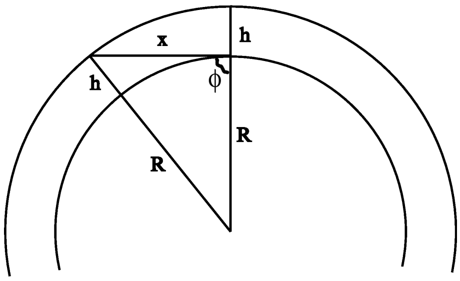
**5.** Оцените разность между поверхностными яркостями (в звездных величинах на квадратную секунду) верхнего и нижнего края диска Солнца во время его восхода (или захода). Можно считать, что атмосфера Земли имеет постоянную плотность и фиксированную высоту, равную 8 км, а поглощение света атмосферой у горизонта ослабляет блеск звезд на $8^m$.

**Решение:**

Прежде всего заметим, что разность поверхностных яркостей совершенно не зависит от того, считаются поверхностные яркости на квадратную секунду, квадратную минуту или на еще какую-либо единицу площади. Более того, такой же окажется и разность блесков двух одинаковых объектов, находящихся в положениях, соответствующих двум краям диска Солнца. В самом деле, звездная величина — логарифмическая характеристика освещенности. Поэтому изменение освещенности в какое-то число раз (соответствующее изменению площади, для которой считается поверхностная яркость) приведет к изменению блеска на некоторое количество единиц, и при вычислении разности эти изменения сократятся. Это одно из весьма полезных свойств звездных величин, благодаря которым их используют в астрономии. Поэтому для удобства вместо двух элементов диска Солнца будем рассматривать два одинаковых точечных объекта, находящихся на разной высоте над горизонтом.

Очевидно, что поглощение излучения в атмосфере определяется лучевой концентрацией вещества (т.е. количеством молекул воздуха, находящихся в цилиндре с единичной площадью основания и осью, направленной на наблюдаемый объект). Оценим соотношение между лучевыми концентрациями вещества в направлении на верхний и нижний край диска Солнца, когда диск касается горизонта. Если мы считаем атмосферу однородной, то отношение лучевых концентраций будет совпадать с отношением расстояний, проходимых светом в атмосфере.

Обозначим $R$ радиус Земли ($R \approx 6400$ км), $h$ — высоту однородной атмосферы, $x$ — расстояние, проходимое светом в атмосфере, $\phi$ — угол между радиусом Земли, проведенным в точку наблюдения, и направлением на наблюдаемый объект.




Воспользуемся теоремой косинусов и запишем

$$(R+h)^2 = R^2 + x^2 - 2Rx\cos\phi.$$

Вообще говоря, такое соотношение можно записать для двух краев диска Солнца, получить соответствующие значения $x$ и найти их отношение, однако эта процедура, хотя и элементарна с точки зрения алгебры, приведет к необходимости достаточно точного решения квадратного уравнения с «неудобными» коэффициентами, что при отсутствии вычислительной техники делать неудобно. Поэтому воспользуемся способом, требующим больших знаний, но зато и более простым.

Вычислим дифференциалы обеих частей равенства. Получим

$$0 = 2x\,dx - 2R(\cos\phi - x\sin\phi\,d\phi).$$

Поскольку нас интересует Солнце на закате или восходе, то можно считать, что нижний край диска касается горизонта. В этом случае $\phi = 90^\circ$, и получившееся выражение упрощается до

$$dx = -R\,d\phi.$$

Заметим, что учет рефракции ничего не изменит, поскольку мы ищем изменение расстояния, а не само расстояние, проходимое светом в атмосфере. Изменение угла $d\phi$ — это угловой размер Солнца (равный примерно $30'$), выраженный в радианах (т.е. $d\phi \approx 1/120$).

Так как звездная величина — логарифмическая характеристика освещенности, то ослабление освещенности в некоторое число раз соответствует увеличению звездной величины на некоторое число единиц. Мы знаем, что свет, проходя расстояние $x$, ослабевает на $8^m$. Разность поверхностных яркостей краев диска Солнца — это ослабление света, проходящего расстояние $dx$, поэтому ее можно вычислить как

$$\Delta m = 8\cdot\frac{|dx|}{x}.$$

$x$ легко выражается из теоремы Пифагора, $(R+h)^2 = x^2 + R^2$, и в итоге

$$\Delta m = 8\cdot\frac{R\,d\phi}{\sqrt{(R+h)^2 - R^2}} = 8\cdot\frac{d\phi}{\sqrt{(1+h/R)^2-1}} \approx 8\,d\phi\sqrt{\frac{R}{2h}}$$

(при раскрытии скобок под корнем получается два слагаемых, одно из которых в $2\cdot 6400/8 = 1600$ раз меньше другого, поэтому им можно безболезненно пренебречь).

Подставляя числовые данные, получаем итоговый ответ:

$$\Delta m = 8\,\frac{1}{120}\sqrt{\frac{6400}{16}} = 4/3 \approx 1^m.3.$$

Отметим, что эффект достаточно велик, чтобы его можно было заметить невооруженным глазом, в чем несложно убедиться, посмотрев на Солнце (или Луну, для нее ответ будет таким же) около горизонта.