



**XXXII Санкт-Петербургская  
Астрономическая олимпиада**  
практический тур, решения

**2025**  
**2**  
**марта**

*10 класс*

Вам даны наложенные на один снимок изображения Луны недалеко от горизонта, полученные во время ее восхода (нижние изображения частично перекрыты зданиями и облаками). Считая рефракцию на горизонте при имеющихся атмосферных условиях равной  $30'$ , постройте зависимость угла рефракции от высоты для малых высот в виде таблицы или графика, а также оцените величину угла рефракции на высоте, равной  $3^\circ$ . Можно считать, что положение горизонта совпадает с нижней границей изображения.



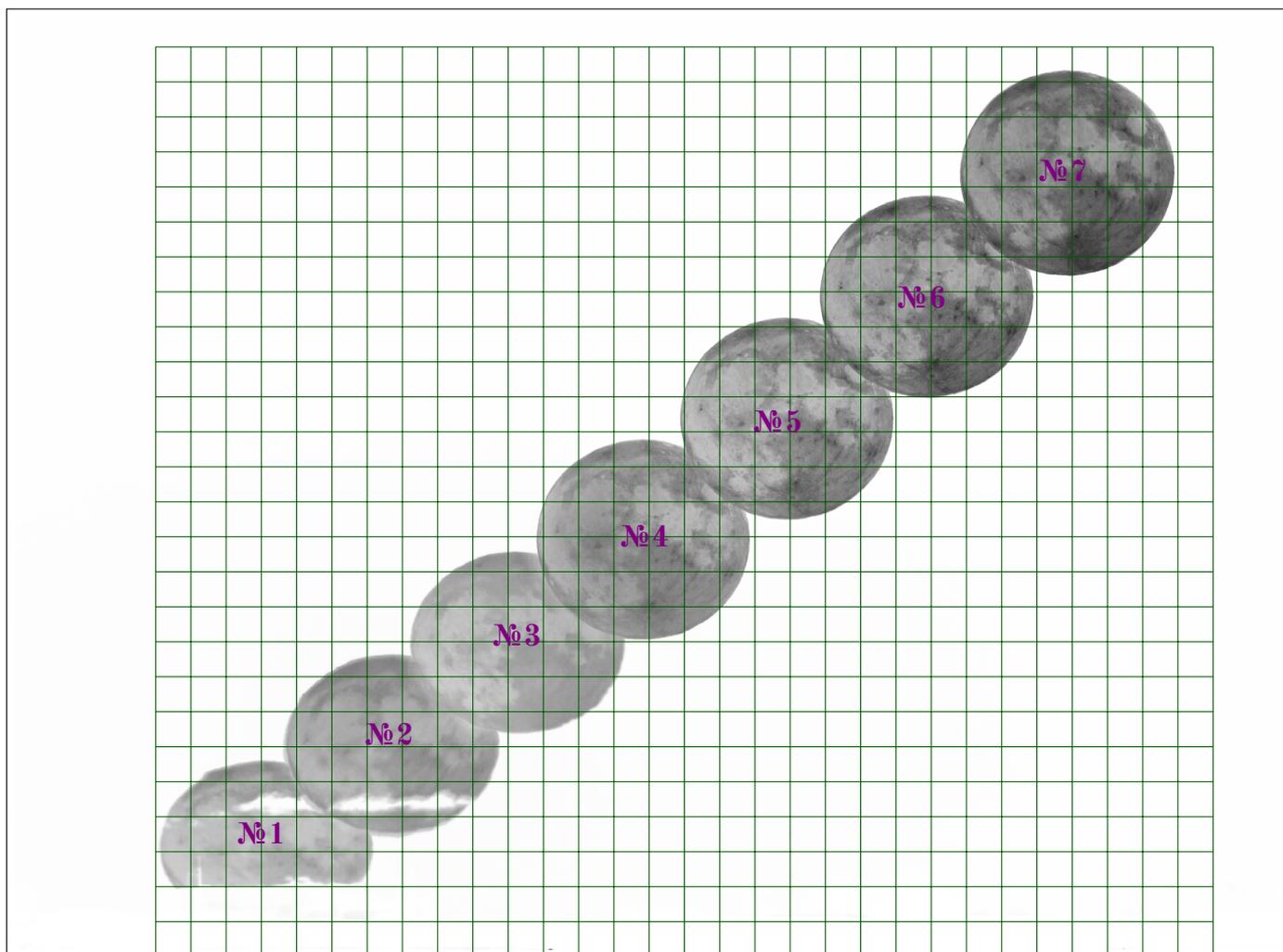
**Решение:**

Как известно, рефракция «приподнимает» объекты над горизонтом. Тогда, предполагая, что снимки Луны сделаны через равные промежутки времени, можно было бы по разнице расстояний между центрами изображений получить искомую зависимость. Однако информации о равных интервалах времени в условии нет – соответствующее предположение может оказаться попросту неверным, опираться на него при решении нельзя.

Удобнее заметить, что диски Луны искажены дифференциальной рефракцией — поскольку их верхние и нижние края находятся на разной высоте, то из-за разного значения рефракции

диски получаются сплюснутыми, нижний край диска Луны поднимается рефракцией сильнее, чем верхний. Этим обстоятельством можно воспользоваться, но начать решение целесообразно с оценки возможной точности, с которой мы можем получить результаты.

Единственный имеющийся в данных масштаб — это горизонтальный размер диска Луны, который не должен быть искажен рефракцией. Однако он из-за эллиптичности орбиты Луны достаточно заметно меняется (от  $29'$  до  $33'$ ), и у нас нет никакой информации о том, чему конкретно он был равен во время получения изображений. Как следствие, задачу имеет смысл решать с погрешностью не лучше  $3' - 4'$ , а горизонтальный размер диска Луны для удобства принять равным  $30'$ . Это одновременно и круглое значение, и отражение того факта, что на листах условий, напечатанных с типовым масштабированием, горизонтальный размер всех дисков оказывается равным  $30$  мм, так что просто удобнее считать, что  $1$  мм на рисунке соответствует  $1'$  в реальности).



Наложим для удобства на рисунок сетку с шагом  $5$  мм и пронумеруем диски. Затем найдем высоты над горизонтом центров всех семи дисков (под центром мы будем понимать уровень, на котором диск имеет наибольшую ширину — такой выбор чуть зависит получаемые значения, но в пределах погрешности). Получим  $16'$ ,  $30'$ ,  $45'$ ,  $60'$ ,  $77'$ ,  $94'$ ,  $112'$ .

Теперь измерим вертикальные размеры каждого из дисков (для первого это сделать непосредственно не удастся, но можно предположить, что он с достаточной точностью симметричен относительно горизонтальной прямой, проходящей через центр, и измерить радиус, а затем умножить его на  $2$ ). Получим  $24'(?)$ ,  $25'$ ,  $26'$ ,  $27'$ ,  $28'$ ,  $29'$ ,  $29'$ .

Дальнейшие действия можно выполнять несколькими разными способами. Можно догадаться, что выше мы получили фактически оценки скорости изменения угла рефракции с ростом высоты (поскольку реальный вертикальный размер диска Луны всегда один и тот же), и предполагая, что между снимками скорость не меняется, построить искомую зависимость по точкам.

Те, кто знаком с понятиями производной и интеграла, то же самое действие опишут иначе: мы узнали производную зависимости угла рефракции  $\rho = \rho(h)$  от высоты, полученную зависимость для производной надо численно проинтегрировать, чтобы узнать зависимость исходной функции.

Наконец, можно просто заметить, что полученные нами данные можно формально записать как систему уравнений вида

$$\rho(h_2) - \rho(h_1) = 30 - \Delta h$$

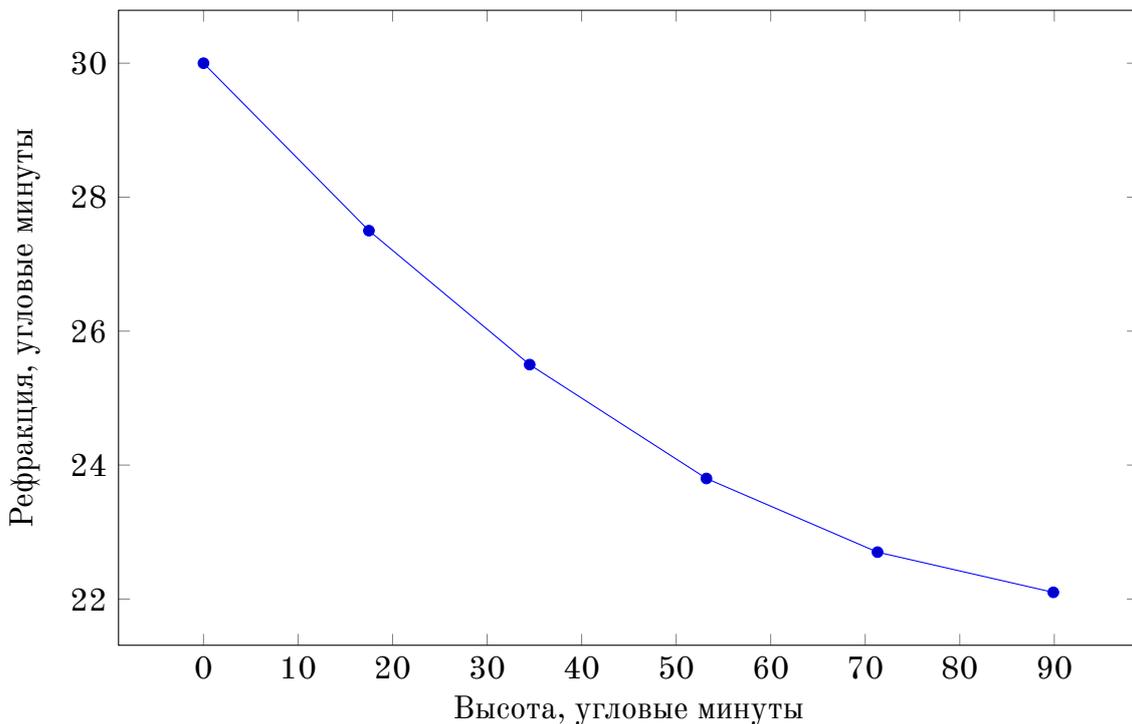
для каждого изображения (тут  $h_1$  и  $h_2$  — высоты верхнего и нижнего края диска, а  $\Delta h$  — высота диска), после чего решить ее. Такой путь сложнее из-за того, что верхние и нижние края дисков находятся на разных высотах, но на небольших участках нужные промежуточные значения можно получить обычной линейной интерполяцией.

Полезно также заметить, что вертикальные размеры дисков растут практически линейно с номером диска (исключением является последний диск), что несколько упрощает расчеты. Отсюда можно сделать вывод, что угол рефракции в среднем уменьшается на  $1'$  при увеличении высоты на каждые  $15'$ , получив тем самым простейшую, но уже достаточно неплохую модель рефракции для интересующего нас случая.

Более аккуратная схема действий может выглядеть примерно так. Центр второго по счету диска, если учесть поправку за рефракцию, находится строго на горизонте (поскольку рефракция на горизонте по условию равна  $30'$ ). Из данных о его вертикальном размере мы знаем, что на интервале высот  $30'$  угол рефракции меняется на  $5'$ . Следовательно, третий диск, который наблюдался на  $15'$  выше, реально находится на  $17'.5$  выше первого. Теперь мы знаем, что на высоте  $18'$  в интервале высот  $30'$  угол рефракции меняется на  $4'$ . Следовательно, четвертый диск находится на высоте  $17' = 15' + 2'$  выше третьего и т.д. Составив таблицу, получим такой набор данных (для упрощения понимания того, как они получены, они не округляются, хотя при решении задачи промежуточные округления вполне допустимы):

№ диска	Наблюдаемая высота	Реальная высота	Рефракция на высоте	Скорость изменения рефракции
2	30'	0'	30'	$-5'/30'$
3	45'	17'.5	27'.5	$-4'/30'$
4	60'	34'.5	25'.5	$-3'/30'$
5	77'	53'.2	23'.8	$-2'/30'$
6	94'	71'.3	22'.7	$-1'/30'$
7	112'	89'.9	22'.1	$-1'/30'$

Подобная таблица (вернее, ее 3-й и 4-й столбцы) — это уже вполне достаточное описание искомой зависимости, но можно изобразить то же в виде графика:



Осталось ответить на последний вопрос. Высота  $3^\circ$  оказывается за пределами диапазона высот, для которого у нас есть данные, но можно предположить, что в дальнейшем рефракция меняется сравнительно медленно и ее изменение можно считать линейным (что также следует из примерно одинаковых вертикальных размеров двух последних дисков). Тогда за оставшиеся  $90'$  рефракция уменьшится примерно на  $3'$  и на высоте  $3^\circ$  будет составлять примерно  $19'$  (реальное значение при таких атмосферных условиях составляет около  $16'$ : разница обусловлена как низкой точностью данных, так и тем, что мы на каждом шаге считали рефракцию равной значению на нижней границе интервала, что систематически ее завышало).

Напоследок приведем исходное изображение, сделанное О. Семисотовой в сентябре 2022 года в Астраханской области:



*П.А.Тараканов*