XXXII Санкт-Петербургская Астрономическая олимпиада

теоретический тур, решения

2025

2 февраля

---

10 класс

---

1. Оцените, сколько потребуется времени звезде, находящейся в диске Галактики на расстоянии 16 кпк от центра Галактики, на то, чтобы совершить один оборот вокруг центра Галактики.

Решение:

Солнце находится на расстоянии 8 кпк от центра Млечного Пути. Наблюдаемая в диске звезда находится вдвое дальше от центра. Кривая вращения Галактики на таких расстояниях достигает плато. Иными словами, скорости движения Солнца и звезды в диске примерно совпадают. Отсюда мы получаем, что период обращения наблюдаемой звезды вокруг центра вдвое больше галактического года (периода обращения Солнца вокруг центра Галактики). Продолжительность галактического года составляет $2 \cdot 10^8$ лет, таким образом звезде потребуется примерно $4 \cdot 10^8$ лет.

С.А.Русаков

2. Вокруг далекой шарообразной планеты по круговой полярной орбите движется космический аппарат. Для перевода аппарата касательным импульсом на параболическую орбиту нужно придать в 5 раз меньшую добавку скорости, чем при касательном старте по параболической орбите с полюса планеты. Определите отношение радиуса исходной орбиты к радиусу планеты.

Решение:

Рассмотрим старт с поверхности планеты. Для перехода на параболическую траекторию нужно придать космическому аппарату (КА) вторую космическую скорость, равную $V_2 = \sqrt{\dfrac{2GM}{R}}$, где R — радиус планеты, M — ее масса. На круговой орбите КА движется с круговой скоростью, равной $V_1 = \sqrt{\dfrac{GM}{r}}$, где r — радиус орбиты аппарата. В этой же точке на параболической траектории КА должен обладать скоростью $V = \sqrt{\dfrac{2GM}{r}}$, то есть необходима добавка скорости, равная

$$\Delta V = V - V_1 = \left(\sqrt{2} - 1\right) \cdot \sqrt{\frac{GM}{r}}.$$

Отношение добавок скорости равно

$$\frac{V_2}{\Delta V} = \frac{\sqrt{\dfrac{2GM}{R}}}{\left(\sqrt{2} - 1\right) \cdot \sqrt{\dfrac{GM}{r}}} = 5,$$

откуда

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1} \cdot \sqrt{\frac{r}{R}} = 5$$

и

$$\frac{r}{R} = \frac{5^2\,(\sqrt{2}-1)^2}{2} \approx \frac{5^2\cdot 0.4^2}{2} = 2.$$

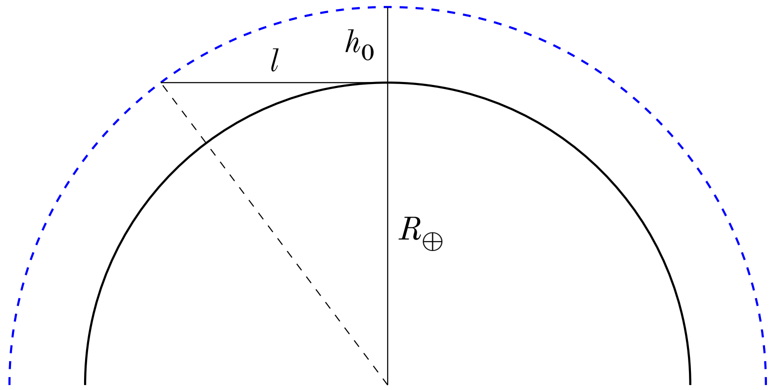
А.В.Веселова

3. Вокруг Земли по круговой орбите вращается светящийся шар. Наблюдения с поверхности Земли показывают, что шар в зените имеет видимую звездную величину, равную -1^m, на горизонте же она равна $+10^m$. Оцените высоту полета шара над поверхностью Земли.

Решение:

Начнем с простой оценки. Разность на 11^m означает, что освещенности, создаваемые шаром в зените и на горизонте, отличаются примерно в $2.5\cdot 10^4$ раз. В простейшем случае освещенность, создаваемая точечным источником, обратно пропорциональна квадрату расстояния до него, и тем самым расстояние до шара в зените примерно в 160 раз меньше, чем на горизонте. Даже самая грубая оценка приведет нас к выводу, что высота полета шара в такой ситуации должна быть меньше чем 1/160 доля радиуса Земли, т.е. не превышает 40 км, что уже совершенно неправдоподобно из-за того, что шар будет двигаться в уже достаточно плотных слоях атмосферы (а более аккуратная, аналогичная последнему этапу этого решения, даст еще более нелепый результат — высота полета окажется равной примерно 0.5 км).

Поэтому следует задуматься над тем, не влияет ли атмосфера на видимую звездную величину шара. Известно, что поглощение света атмосферой в зените составляет $\Delta m_0 = 0^m.2$. Вычислим отсюда поглощение на горизонте, воспользовавшись моделью высоты однородной атмосферы с $h_0 = 8$ км.



Расстояние, который преодолеет свет в атмосфере на пути от шара на горизонте до наблюдателя,

$$l = \sqrt{(R_\oplus + h_0)^2 - R_\oplus^2} \approx \sqrt{2R_\oplus h_0} = \sqrt{2\cdot 6.4\cdot 10^3\cdot 8} = 320 \text{ км}.$$

Оно оказывается больше расстояния в зените в $320/8 = 40$ раз, поэтому поглощение на горизонте составит $\Delta m = 40\cdot 0^m.2 = 8^m$.

Это означает, что из изменения видимой звездной величины шара на 11^m только 3^m обусловлены изменением расстояния до него, и без учета поглощения в атмосфере освещенность изменилась бы в $2.5^3 \approx 16$ раз. Тогда в зените светящийся шар ближе к наблюдателю, чем на горизонте, в $\sqrt{16} = 4$ раза, и высоту полета шара h можно вычислить из теоремы Пифагора:

$$\sqrt{(R_\oplus + h)^2 - R_\oplus^2} = 4h.$$

Отсюда

$$2R_\oplus h + h^2 = 16h^2$$

и

$$h = \frac{2}{15}R_\oplus \approx 9\cdot 10^2 \text{ км}.$$

Напоследок отметим, что реальное значение пригоризонтного поглощения несколько больше 8^m (использованная нами модель все-таки является весьма упрощенной), поэтому полученный ответ на самом деле является скорее нижней оценкой возможной высоты полета шара.

С.А.Русаков

4. Известно, что черные дыры «испаряются», теряя массу на излучение, причем температура черной дыры связана с ее массой $\mathfrak{M}$ зависимостью следующего вида:

$$T \approx 10^{-7} \frac{\mathfrak{M}_\odot}{\mathfrak{M}} \text{ К}.$$

Оцените минимально возможную плотность черной дыры, которая на современном этапе эволюции Вселенной способна терять массу.

Решение:

Радиус черной дыры («радиус Шварцшильда») R связан с ее массой $\mathfrak{M}$ следующим выражением:

$$R = \frac{2G\mathfrak{M}}{c^2},$$

где G — гравитационная постоянная, c — скорость света. Это утверждение можно использовать как готовое, хотя при необходимости его можно легко получить из классического выражения для параболической (второй космической) скорости — она на поверхности черной дыры должна равняться скорости света.

Сразу заметим, что поскольку радиус черной дыры прямо пропорционален ее массе, плотность черных дыр с ростом массы убывает. Тем самым поиск минимально возможной плотности эквивалентен поиску максимально возможной массы и минимально возможной температуры дыры.

Поглощение черной дырой чего-либо (вещества или излучения) приводит к тому, что ее масса увеличивается. Испарение — наоборот, к уменьшению массы. Поэтому если масса черной дыры уменьшается, то это означает, что она достаточно маломассивная, горячая и плотная для того, чтобы ее испарение не компенсировалось внешними источниками вещества или излучения. Интересующий нас предельный случай — это ситуация, когда внешние источники обеспечивают наименьший возможный прирост массы дыры. Какими они могут быть?

На черную дыру может аккрецировать вещество либо с соседней звезды, либо из межзвездной среды. Однако вполне возможна ситуация, когда аккреция фактически отсутствует, поэтому этот источник можно не рассматривать. На черную дыру может падать излучение других объектов, однако если они находятся далеко от нее, это тоже сравнительно небольшой источник массы. Единственное, от чего избавиться совершенно не удастся — это реликтовое излучение, которое поглощается черной дырой и тем самым является постоянным источником массы. Поэтому в предельном случае излучение черной дыры за счет испарения и поглощение реликтового излучения черной дырой должны компенсировать друг друга.

В принципе далее задачу можно решать, вычислив светимость черной дыры за счет испарения и приравняв ее к энергии, поглощаемой дырой за единицу времени. Но намного проще будет заметить, что описанная выше ситуация полностью удовлетворяет определению термодинамического равновесия между черной дырой и реликтовым излучением, а это значит, что температура излучения такой черной дыры должна равняться температуре реликтового фона в современную эпоху — примерно 2.7 К.

Теперь осталось только вычислить ответ. Поскольку

$$T \approx 10^{-7} \frac{\mathfrak{M}_\odot}{\mathfrak{M}} \text{ К},$$

то масса такой черной дыры равна

$$\mathfrak{M} \approx \frac{10^{-7} \text{ К}}{T} \mathfrak{M}_\odot \approx \frac{1}{2.7} \cdot 10^{-7} \mathfrak{M}_\odot = \frac{2 \cdot 10^{30}}{2.7} \cdot 10^{-7} \text{ кг} \approx 7 \cdot 10^{22} \text{ кг}.$$

Ее плотность будет равна

$$\rho = \frac{\mathfrak{M}}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{3c^6}{32\pi G^3 \mathfrak{M}^2},$$

подставляя сюда значения всех констант в СИ и учитывая, что нас интересует точность в лучшем случае с одной значащей цифрой (а в реальности скорее порядковая), получаем

$$\rho = \frac{3 \cdot 3^6 \cdot 10^{48}}{32 \cdot 3 \cdot 7^3 \cdot 10^{-33} \cdot 7^2 \cdot 10^{44}} \approx \frac{3^5 \cdot 10^{36}}{7^5} \approx \frac{250 \cdot 10^{36}}{7 \cdot 50 \cdot 50} \approx 10^{34} \text{ кг/м}^3.$$

Заметим, что тем самым испарение черных дыр — эффект, для «обычных» дыр звездных масс (и тем более сверхмассивных дыр в центрах галактик) на практике не реализующийся. Полученная нами в качестве промежуточного результата «пограничная» масса $7 \cdot 10^{22}$ кг — это примерно масса Луны.

П.А.Тараканов

5. Рассеянное звездное скопление, состоящее из тысячи одинаковых звезд, имеющих абсолютную звездную величину 0^m, на 10^m тусклее, чем шаровое звездное скопление, состоящее из миллиона звезд, похожих на Солнце. Оцените максимальное расстояние до шарового звездного скопления.

Решение:

Оценим абсолютную звездную величину шарового звездного скопления (ШЗС). Вспомнив, что абсолютная звездная величина Солнца равна $+5^m$ ($+4^m.8$, если быть более точным), поймем, что ШЗС в миллион раз ярче: $M_{\text{ш}} = 5^m - 15^m = -10^m$ (здесь и далее в обозначениях всех величин, относящихся к ШЗС, используется индекс «ш»). ШЗС равномерно распределены в гало Млечного Пути, поэтому можно считать, что поглощение света в плоскости нашей Галактики на них практически не влияет. Поэтому видимую звездную величину ШЗС найдем как

$$m_{\text{ш}} = M_{\text{ш}} + 5 \lg r_{\text{ш}} - 5,$$

где $r_{\text{ш}}$ — искомое расстояние до ШЗС в парсеках. Мы заранее можем сказать, что эта величина находится в пределах от 1 кпк (характерный размер звездного диска Галактики) до $15 + 8 = 23$ кпк, так как радиус нашей Галактики составляет 15 кпк, а Солнце находится на расстоянии 8 кпк от ее центра.

Рассеянное звездное скопление (РЗС) по аналогичным соображениям будет иметь абсолютную звездную величину $M_{\text{р}} = 0^m - 7^m.5 = -7^m.5$ (для соответствующих величин используется индекс «р»). Тогда

$$m_{\text{р}} = M_{\text{р}} + 5 \lg r_{\text{р}} - 5.$$

Межзвездным поглощением пока что пренебрежем. Итак, исходя из условия $m_{\text{р}} = m_{\text{ш}} + 10^m$, получаем соотношение:

$$M_{\text{р}} + 5 \lg r_{\text{р}} - 5 = M_{\text{ш}} + 5 \lg r_{\text{ш}} - 5 + 10.$$

Подставляя абсолютные звездные величины, получаем:

$$-7^m.5 + 5 \lg r_{\text{р}} - 5 = -10^m + 5 \lg r_{\text{ш}} - 5 + 10$$

и

$$5 \lg \frac{r_{\text{р}}}{r_{\text{ш}}} = 7.5^m \qquad \Rightarrow \qquad r_{\text{р}} = 10^{1.5} r_{\text{ш}}.$$

Без учета межзвездного поглощения мы получили, что РЗС должно находиться примерно в $10\sqrt{10} \approx 30$ раз дальше, чем ШЗС. Учет межзвездного поглощения лишь ухудшит ситуацию.

С учетом того, что в пределах Млечного пути мы наблюдаем РЗС лишь в диске и относительно близко (например, те же Плеяды находятся на расстоянии 150 пк), то ШЗС мы ближе расположить не можем. Значит, речь идет о РЗС, расположенном в другой галактике.

С современными крупными телескопами звездные скопления можно наблюдать, например, в Большом Магеллановом Облаке. Эта галактика находится на расстоянии примерно 50 кпк от нас, и тогда оценка расстояния до ШЗС составит $50/30 \approx 1.7$ кпк, что довольно близко к значению расстояния до реального шарового скопления M4 в Скорпионе (2.2 кпк).

Можем ли мы увидеть РЗС еще дальше? Да, можем. Например, в галактике M51 «Водоворот», расположенной от нас на расстоянии в $\sim$ 10 Мпк. Это дает оценку расстояния до ШЗС, равную 300 кпк, но на таком расстоянии ШЗС уже должна принадлежать какой-то другой галактике, например, Галактике Андромеды (и, значит, находится на расстоянии около 750 кпк). Есть и более далекие галактики, в которых на сегодняшний день разрешаются РЗС: M61 или M77.

Максимальное расстояние до таких галактик можно оценить как 30 Мпк, и тогда ШЗС, описанное в условии, формально может находиться на расстоянии до примерно 1 Мпк от нас, при этом оно также будет принадлежать другой галактике.

В.В.Григорьев