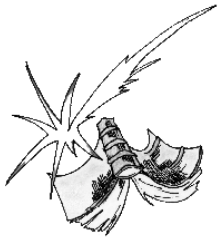


XXVI Санкт-Петербургская астрономическая олимпиада

теоретический тур, решения

2019

3 февраля

---

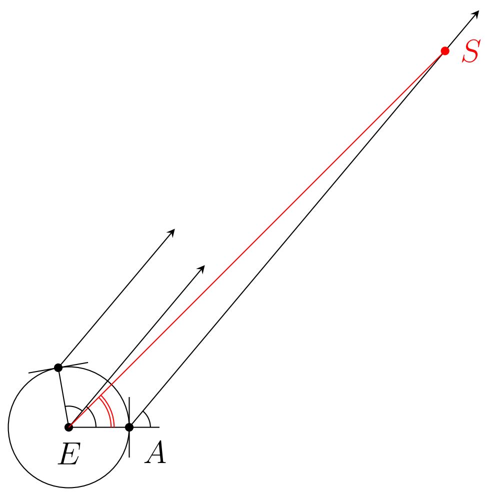
9 класс

---

1. Илон Маск мечтает сделать интернет доступным для всех. Для этого он планирует запустить множество спутников на орбиты с одинаковой высотой. Рассчитайте период обращения одного спутника и их минимальное количество, если по техническому заданию устойчивый прием возможен в случае, когда спутник находится на высоте не менее $40°$ над горизонтом.

Решение:

Раз требуется найти минимальное количество спутников, то их лучше запустить на как можно более высокую орбиту, тогда каждый их них будет охватывать максимально возможную площадь поверхности Земли. Рассмотрим предельный случай, т.е. найдем такие две точки на поверхности Земли, для которых спутник, удаленный на бесконечность, виден на высоте $40°$ над горизонтом (направление на бесконечность указано стрелками):



Получается, что эти точки разнесены по поверхности Земли на угол в $100°$ (два угла по $50°$, выделенные черными дугами). В виду того, что эта величина не является делителем $360°$ (чтобы на орбите располагалось целое число спутников), то спутник можно опустить до такой высоты, чтобы две крайние точки были разнесены на угол в $90°$ (т.е. $\angle AES = 45°$, выделен красным), тем самым мы расположим 4 спутника на круговой орбите. Но при таком расположении на Земле останутся две приполярных области, не видимые спутникам, для их покрытия необходимы еще два спутника, поэтому кажется, что достаточно 6 спутников (например, если расположить два спутника на геостационарной и четыре — на геосинхронной полярной орбите).

Рассчитаем высоту орбиты отдельного спутника. Если построить треугольник с вершинами в центре Земли E, крайней точке точке наблюдения A и спутнике S, то угол $\angle ESA = 5°$. Применим теорему синусов к этому треугольнику ($r = ES$ — радиус орбиты, выделен красным):

$$\frac{EA}{\sin ESA} = \frac{ES}{\sin EAS} \quad \Rightarrow \quad \frac{R_\oplus}{\sin 5°} = \frac{r}{\sin 130°}$$

$$R_\oplus \sin 50^\circ = r \sin 5^\circ$$

$$r = R_\oplus \frac{\sin 45^\circ \cos 5^\circ + \cos 45^\circ \sin 5^\circ}{\sin 5^\circ} = R_\oplus \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} 5^\circ} + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \approx R_\oplus \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{57.3^\circ}{5^\circ} + 1 \right) \approx$$

$$\approx R_\oplus \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (11.5 + 1) \approx 8.8 R_\oplus$$

Полученный результат оказывается больше радиуса орбиты геостационарного спутника (42 тыс. км), то есть спутники не могут «висеть» одной точкой. Рассчитаем период обращения T одного такого спутника по третьему закону Кеплера, сравнив спутник с Луной:

$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM_\oplus} = \frac{T_☾^2}{a_☾^3} \qquad \Rightarrow \qquad T = T_☾ \sqrt{\left(\frac{r}{a_☾}\right)^3} = 27.3\ \text{сут.} \cdot \sqrt{\left(\frac{8.8 R_\oplus}{60 R_\oplus}\right)^3} \approx 1.5\ \text{сут.}$$

Таким образом, спутники следует расположить на двух перпендикулярных орбитах с указанным радиусом, и всего их окажется 8 штук. С учетом того, что площади покрытия спутников будут перекрываться, то, несмотря на две точки пересечения орбит, их можно расположить так, чтобы они не сталкивались.

Примечание: разумеется, главным ограничением для спутников и приемников является мощность передаваемого сигнала, поэтому спутники должны быть существенно ниже (сам Маск планирует их расположить на орбитах с высотой около 1000 км), и поэтому должно быть существенно больше (около 150 штук).

В.В.Григорьев

2. Полярник, встречавший восход Солнца в 2018 году на северном полюсе Земли, обнаружил, что верхняя точка диска Солнца впервые появилась на горизонте в некотором направлении. Будет это направление тем же или нет в 2019 году? Если нет — чему будет равен угол между этими направлениями и в какую сторону от направления 2018 года его надо будет отсчитывать? Изменением атмосферной рефракции из-за смены погодных условий пренебречь.

Решение:

На полюсе горизонт совпадает с небесным экватором, поэтому время между двумя последовательными восходами верхней точки диска Солнца будет совпадать с временем между двумя последовательными «однотипными» моментами пересечения Солнцем экватора — т.е. прохождением точки весеннего равноденствия. Этот интервал времени называется тропическим годом и составляет, как известно, примерно 365.25 (точнее 365.2422...) солнечных суток.

Поскольку солнечные сутки — это период суточного движения Солнца на небе для наблюдателя, получаем, что Солнце успеет совершить за тропический год какое-то количество полных оборотов и еще примерно четверть оборота, следовательно, появится над горизонтом примерно на 90° (точнее на 87°) западнее (или — для полярника — правее) исходной точки.

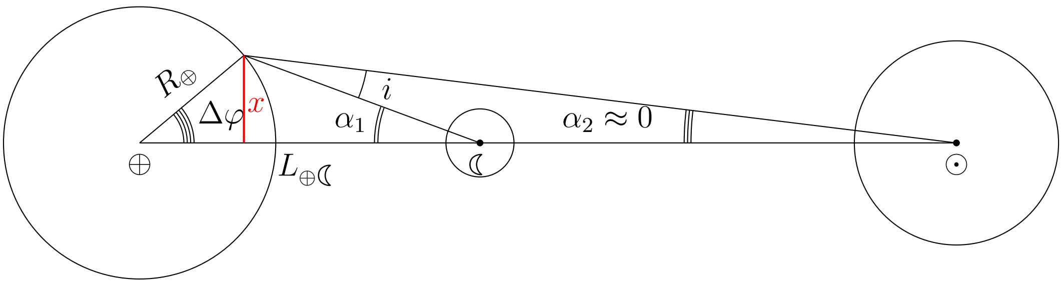
Заметим, что средняя атмосферная рефракция на этот результат практически не влияет: поскольку она поднимает диск Солнца над горизонтом в среднем на один и тот же угол, оба восхода наступят раньше по времени, но угол между ними практически не изменится. Изменения могли бы появиться при существенной разнице в углах рефракции в интересующие нас два момента, однако это обстоятельство по условию мы не учитываем.

М.В.Костина, П.А.Тараканов

3. Затмение Агафокла — одно из самых известных античных затмений — произошло 15 августа 310 года до н.э. Это затмение было полным на Геллеспонте (сейчас этот пролив называется Дарданеллы, 40° с.ш., 30° в.д.), где его наблюдал Калипп. Известно, что Аристил с Тимохарисом наблюдали это затмение в Александрии (30° с.ш., 30° в.д.), причем они видели, что тень Луны двигалась перпендикулярно меридиану. Оцените максимальную фазу затмения в Александрии.

Решение:

Из условия видно, что оба пункта наблюдения располагаются на одном меридиане. Так как тень Луны двигалась перпендикулярно меридиану, то максимальные фазы затмения в обоих пунктах наступили одновременно и можно рассматривать мгновенные положения светил для наблюдателей в момент максимальной фазы затмения. Можно считать, что в том пункте, где затмение было полным, луч зрения наблюдателя проходит через центры дисков как Луны, так и Солнца. В том пункте, где затмение частное, центры дисков Луны и Солнца отстоят друг от друга на некоторый угол i. Оценим этот угол, нарисовав рисунок. Для наглядности будем считать, что на Геллеспонте Солнце и Луна находились в зените. Конечно, это не так, но поправка будет очень мала, а задача, по условию, оценочная.



Так как расстояние от Земли до Солнца примерно в 400 раз больше, чем расстояние до Луны, то можно считать, что $\alpha_2 \approx 0$, и, следовательно, $i \approx \alpha_1$. Из рисунка также очевидно, что угол α_1 равен угловому размеру красного отрезка x при наблюдении с Луны. При этом расстоянием, с которого проводятся наблюдения, можно считать как расстояние от центра Земли до центра Луны $L_{\oplus☾}$, так и расстояние от поверхности Земли до центра Луны, т.е. $L_{\oplus☾} - R_\oplus$, оценка при этом изменится незначительно. В свою очередь $x = R_\oplus \sin\Delta\varphi$, $\Delta\varphi = 10°$. Так как все углы малы (даже $\Delta\varphi$), их синусы можно заменить на величины углов, выраженные в радианах. Суммируя все вышеизложенное, получаем

$$i \approx \alpha_1 \approx \frac{x}{L_{\oplus☾}} \approx \frac{R_\oplus \Delta\varphi}{L_{\oplus☾}}.$$

Подставляя числа, получаем $i \approx 3 \cdot 10^{-3}$ рад $\approx 0°.17$.

Это означает, что центр диска Луны смещается по отношению к центру диска Солнца на $0°.17$. Значит, Луной будет закрыто $0°.5 - 0°.17 = 0.°33$ или $0.33/0.5 \approx 0.7$ диаметра Солнца, т.е. фаза затмения в Александрии была примерно 70%.

Убедиться в том, что эти весьма приближенные расчеты очень близки к действительности, можно вот по этой ссылке:

https://eclipse.gsfc.nasa.gov/SEsearch/SEsearchmap.php?Ecl=-03090815

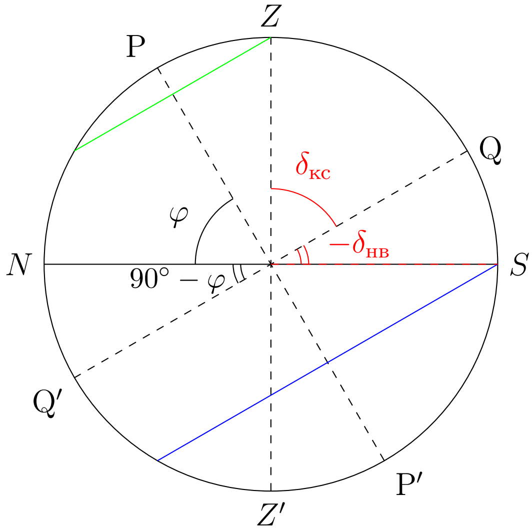
Осталось решить самый загадочный вопрос задачи: если затмение наблюдали Калипп, Аристил и Тимохарис, то почему оно «затмение Агафокла» и кто он, собственно, такой? Агафокл — это тиран Сиракуз. Затмение по традиции называется его именем, поскольку оно произошло в начале похода сиракузцев под началом Агафокла в Ливию (и оказало определенное моральное воздействие на войско). Исторические записи (например, Диодора Сицилийского) об этом астрономическом событии позволили историкам уточнить дату начала похода.

М.В.Костина

4. Оцените, какая часть звезд, хотя бы иногда оказывающихся над горизонтом в Петербурге, всегда оказывается в верхней кульминации к северу от зенита.

Решение:

Нарисуем картинку, изображающую небесную сферу в проекции на плоскость небесного меридиана:



Поскольку широта Петербурга $\varphi = 60°$, получается, что хотя бы когда-нибудь над горизонтом появляются звезды, склонение которых $\delta > \delta_{нв} = -30°$, а к северу от зенита кульминируют звезды со склонением $\delta > \delta_{кс} = 60°$. Поскольку звезды расположены на небе примерно равномерно, нам требуется оценить отношение площади верхней «шапочки» сферы к площади сферы без нижней части (отделенной синей линией).

Дальше можно действовать двумя путями. Во-первых, можно воспользоваться формулой площади поверхности сферы, заключенной между двумя кругами равных склонений (если она известна). Для единичной сферы это

$$S = 2\pi |\sin\delta_1 - \sin\delta_2|.$$

Тогда искомое отношение составляет

$$\frac{2\pi|\sin 90° - \sin 60°|}{2\pi|\sin 90° - \sin(-30°)|} = \frac{1 - \sqrt{3}/2}{1 + 1/2} = \frac{2 - \sqrt{3}}{3} \approx 0.1.$$

Во-вторых, можно оценить искомые площади приближенно. «Шапочка», соответствующая звездам, кульминирующим к северу от зенита, не слишком сильно отличается от круга с радиусом $1/2$ (для единичной сферы), поэтому ее площадь примерно равна $\pi/4$. Аналогичное рассуждение позволяет оценить площадь области, в которой находятся невосходящие звезды, она оказывается равной примерно π. Тогда, поскольку общая площадь единичной сферы равна 4π, искомое отношение можно оценить как

$$\frac{\pi/4}{4\pi - \pi} = \frac{1}{12} \approx 0.08.$$

Можно предложить и другие варианты приближенных оценок площади (например, оценить площадь области невосходящих звезд как площадь половины сферы за вычетом площади «пояса» между экватором и параллелью 30°, вычисленной как площадь трапеции), но все они дадут близкие результаты — около 9%.

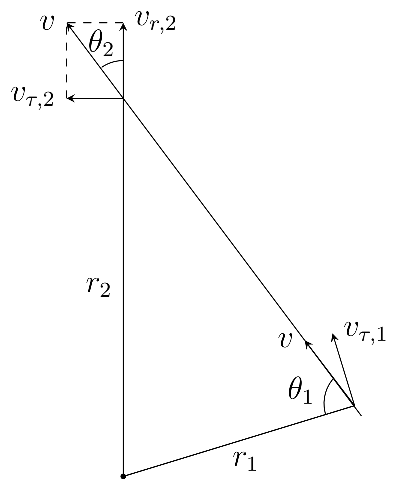
П.А.Тараканов

5. Некоторая звезда обладает видимой звездной величиной 7^m и ненулевым собственным движением. Какова будет ее видимая звездная величина в тот момент, когда собственное движение звезды уменьшится в 4 раза? Полная скорость звезды остается постоянной.

Решение:

Разность звездных величин в данном случае определяется различием расстояний:

$$m_1 - m_2 = 2.5 \lg \frac{r_1^2}{r_2^2} = 5 \lg \frac{r_1}{r_2}.$$



Собственное движение связано с тангенциальной компонентой скорости и расстоянием как

$$v_\tau \text{ [км/с]} = 4.74 \cdot \mu \text{ [}''\text{/г]} \cdot r \text{ [пк]}.$$

Пусть θ_1, θ_2 — углы между вектором полной скорости звезды и лучами зрения, тогда

$$v_{\tau,1} = v \sin\theta_1, \quad v_{\tau,2} = v \sin\theta_2 \implies v \sin\theta_{1,2} = 4.74 \mu_{1,2} r_{1,2} \implies \frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2}\frac{r_1}{r_2}.$$

По теореме синусов для текущего положения звезды и момента, когда собственное движение уменьшится в 4 раза,

$$\frac{\sin\theta_1}{r_2} = \frac{\sin\theta_2}{r_1} \implies \frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = \frac{r_2}{r_1}.$$

Подставляем выражение для отношения синусов в формулу для собственных движений:

$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{\mu_1}{\mu_2}\frac{r_1}{r_2} \implies \frac{r_2}{r_1} = \sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_2}} = \sqrt{4} = 2.$$

Отсюда разность звездных величин

$$m_1 - m_2 = 5 \lg \frac{1}{2} = -5 \lg 2 = -1.5 \implies m_2 = 7^m + 1.5^m = 8.5^m.$$

А.В.Веселова