



XXXI Санкт-Петербургская
астрономическая олимпиада
практический тур, решения

2024
3
марта

7–8 классы

Перед Вами кадр из мультфильма про Лунтика. Для тех участников, кто почему-то не в курсе, уточним, что Лунтик, как написано в Википедии, «маленькое пушистое существо — космический пришелец, который родился на Луне и вылупился из яйца».

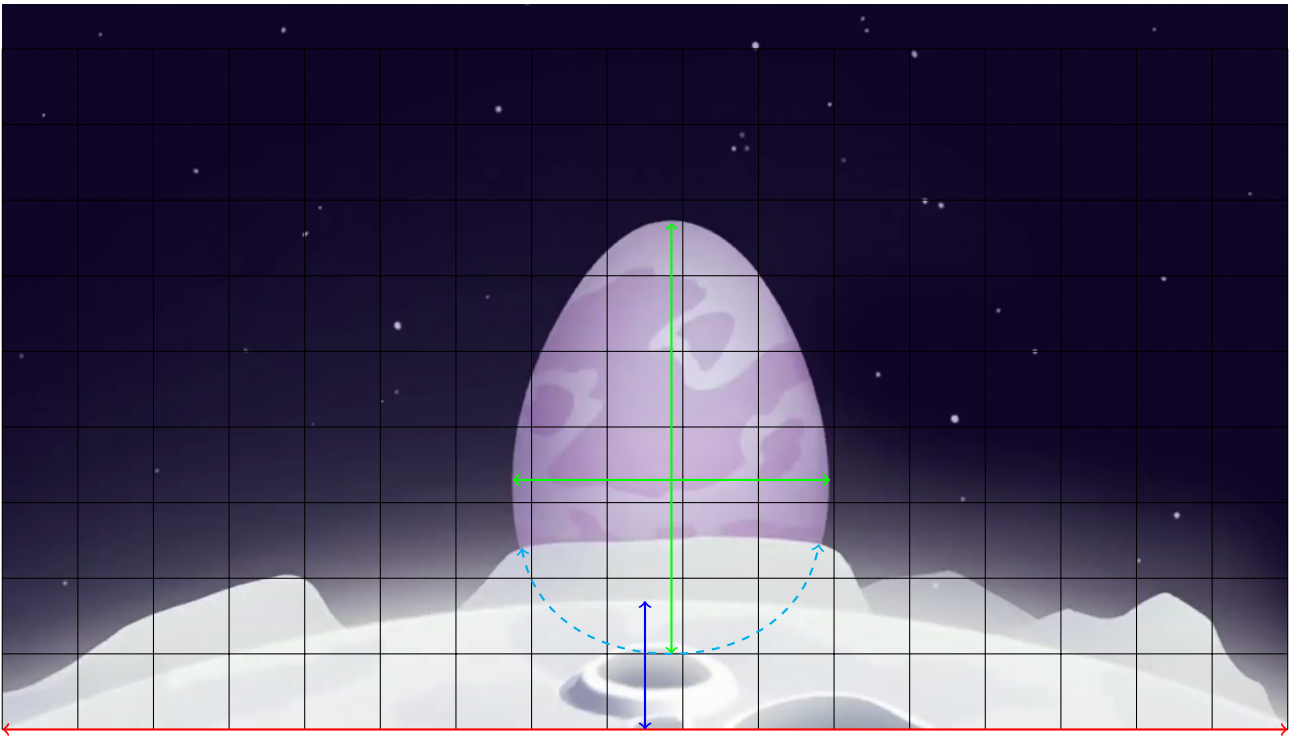
Вы видите то самое яйцо, из которого вылупится Лунтик, на поверхности Луны в одном из лунных кратеров, вместе с частью поверхности. Оцените по этим данным размеры Лунтика (исходя именно из этого изображения).



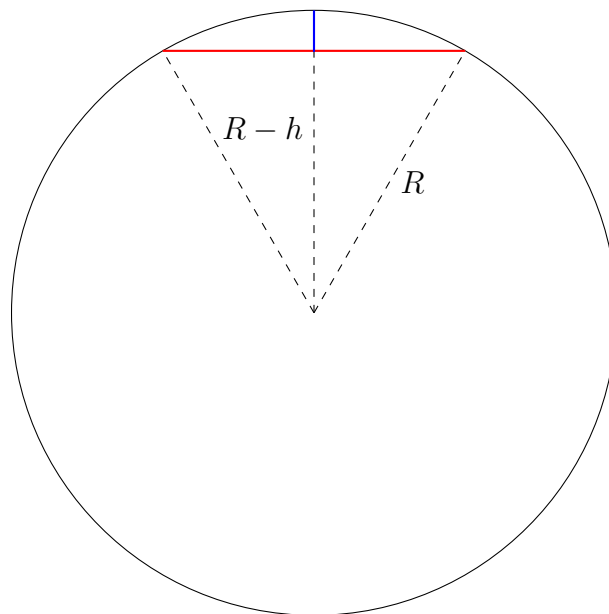
Решение:

Нанесем для удобства на исходный цветной кадр из мультфильма изображение сетку с размером клетки 1 см (из-за особенностей печати заданий у разных участников размеры могли чуть отличаться, что приведет к пропорциональному изменению использованных в этом решении данных, но, естественно, никак не скажется на итоговом ответе).

Дуга, изображающая поверхность Луны, отчетливо видна, и принципиально можно попытаться найти точку, от которой все точки дуги находятся на одинаковом расстоянии. Однако такая точка будет лежать за пределами листа бумаги, что осложнит построения. Поэтому поступим иначе: учтем, что нижняя граница изображения является хордой для этой дуги (на кадре она выделена красным), измерим ее длину, а также измерим расстояние от нее до наиболее далекой от нее точки дуги (выделено синим). Выяснится, что эти расстояния равны $l = 17$ см и $h = 1.7$ см соответственно.



Поскольку дуга представляет собой часть границы диска Луны, построим границу диска целиком (чуть исказив изображение, чтобы было лучше видно), обозначив радиус Луны как R :



Из построения видно, что мы можем записать теорему Пифагора для прямоугольного треугольника:

$$(R - h)^2 + (l/2)^2 = R^2.$$

Отсюда

$$R^2 - 2Rh + \frac{l^2}{4} = R^2,$$

откуда мы можем выразить радиус Луны и вычислить его величину в сантиметрах на изображении:

$$\frac{l^2}{4 \cdot 2h} = \frac{17^2}{8 \cdot 1.7} = \frac{17 \cdot 10}{8} = \frac{5}{4} \cdot 17 \text{ см.}$$

Вычислять величину радиуса до конца можно (получится примерно 21 см), но не нужно — чуть позже станет понятно, почему.

Теперь нам надо каким-то образом оценить размеры реальной Луны. Можно вспомнить, что Луна по радиусу примерно в 4 раза меньше, чем Земля, и с учетом того, что $R_{\oplus} \approx 6400$ км,

мы получим $R \approx 1600$ км. Получится не очень точная, но вполне пригодная для дальнейших действий оценка.

Можно также вспомнить, что расстояние до Луны составляет около 400 тысяч километров, а ее угловые размеры на небе — примерно $30'$. Поскольку полная окружность — это 360° , то 720 Лун суммарно имеют размер, равный расстоянию от Земли до Луны, умноженному на 2π . Отсюда можно сделать вывод, что $2R \cdot 720 = 2\pi \cdot 400$ тыс. км, откуда

$$R \approx \frac{2 \cdot 3 \cdot 400}{2 \cdot 720} = \frac{5}{3} \approx 1.7 \text{ тысяч км.}$$

Заметим, что эта оценка точнее предыдущей (реальный средний радиус Луны составляет около 1737 км).

Расстояние до Луны, если его не вспомнить просто так, можно вычислить, используя что-нибудь другое (информацию о том, что свет идет до Луны примерно 1.3 секунды, тот факт, что это расстояние с хорошей точностью равно 60 радиусам Земли или $1/400$ астрономической единицы и т.п.). Наконец, можно просто вспомнить примерное значение — радиус Луны составляет около 1.7 тысяч км.

Так или иначе в итоге мы получим, что $\frac{5}{4} \cdot 17$ см на изображении соответствуют 1.7 тыс. км в реальности, а это означает, что у изображения достаточно удачный масштаб:

$$\frac{1700 \text{ км}}{\frac{5}{4} \cdot 17 \text{ см}} = \frac{100 \cdot 4 \text{ км}}{5 \text{ см}} = 80 \text{ км/см,}$$

то есть 1 см на изображении соответствуют 80 км в мультипликационной «реальности».

Осталось аккуратно измерить вертикальные и горизонтальные размеры яйца в сантиметрах, не забыв, что его нижняя часть нам не видна (зеленые линии на изображении). Размер по горизонтали определяется достаточно надежно и равен 4.2 см, вертикальный размер существенно зависит от предполагаемой формы яйца, но в качестве некоторого среднего значения можно взять 5.7 см (примерная форма для этого случая изображена на рисунке). Тогда в «реальности» яйцо имеет размеры $\approx 340 \times 460$ км, а Лунтик, естественно, должен иметь размеры *меньше, чем размеры яйца*. Конечно, видевшие мультфильм знают, что Лунтик по размеру примерно совпадал с яйцом, однако именно из данного в условии изображения это не следует.

П.А.Тараканов