XXVIII Санкт-Петербургская астрономическая олимпиада

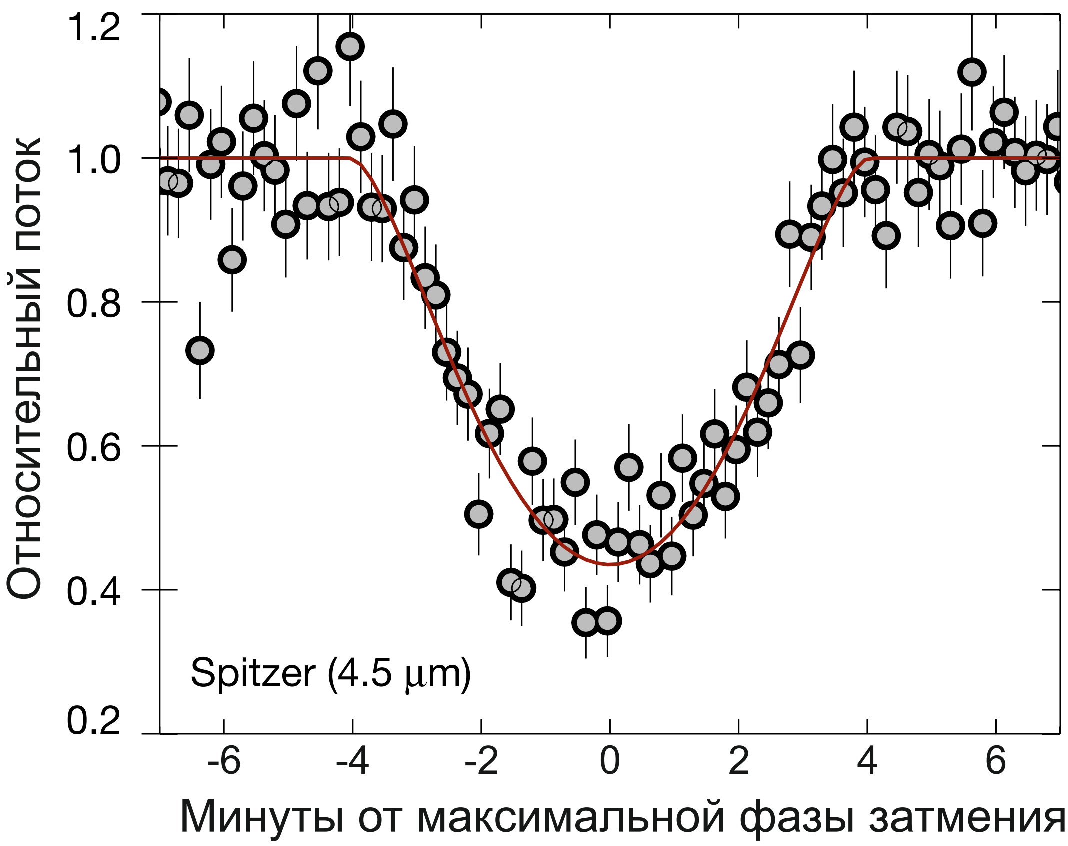
практический тур, решения

2021

14 марта

11 класс

Вам дан график кривой блеска (наблюдения получены на телескопе Spitzer), образованной прохождением планеты по диску звезды Gaia DR2 2146576589564898688. Детальный анализ показал, что данная планета имеет период обращения 1.4 дня при радиусе круговой орбиты 3 млн. км. Угол между лучом зрения и нормалью к плоскости орбиты составляет 88°.8. Исходя из этих параметров, оцените радиусы звезды и планеты, а также определите, к каким типам относятся звезда и планета.



Решение:

При помощи третьего закона Кеплера по известному радиусу орбиты a и периоду обращения T находим массу звезды M в массах Солнца, считая ее заметно больше массы планеты:

$$M = \frac{4\pi^2 a^3}{GT^2} = 0.52\ M_\odot$$

Из графика видно, что затмение длилось $\Delta t = 8$ минут, а планета это время, можно сказать, двигалась по прямой со скоростью v:

$$v = \sqrt{\frac{GM}{a}} = 1.5 \times 10^5 \text{ м/с},$$

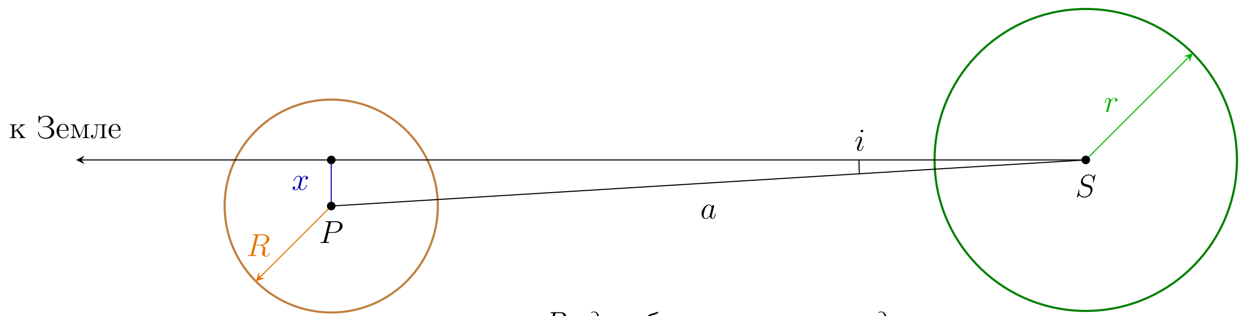
то есть планета прошла $d = v\Delta t = 72$ тыс. км.

Если внимательно присмотреться к кривой блеска, то на ней видно плавное убывание яркости звезды, отсутствие плато и симметричное возрастание яркости. Такое возможно, если планета «чиркнула» по звезде (т.е. планета должна «выступать» за пределы изображения звезды, в крайнем случае — диски должны касаться внутренним образом). Однако, глубина минимума говорит о том, что было закрыто около половины (!) диска звезды. Пусть радиус планеты — R, радиус звезды — r, а их отношение — $k = r/R$.

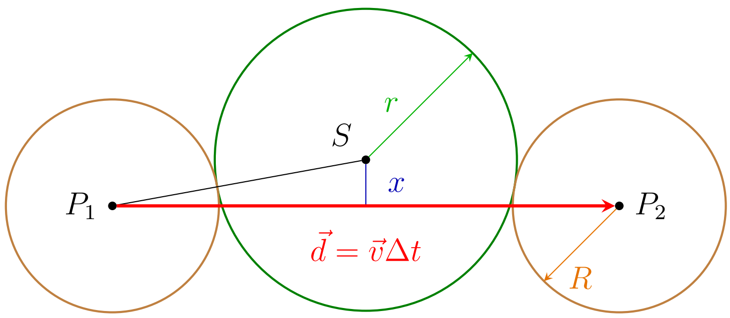
Пусть угол между лучом зрения и плоскостью орбиты равен $i = 90^\circ - 88^\circ.8 = 1^\circ.2$. Тогда $\sin i \approx 1^\circ.2/60^\circ = 1/50 = 0.02$. Пусть x — расстояние между лучом, соединяющим наблюдателя и центр звезды, и центром планеты. Тогда

$$x = a\sin i = 3\times 10^6 \cdot 0.02 = 6\times 10^4 \text{ км}.$$

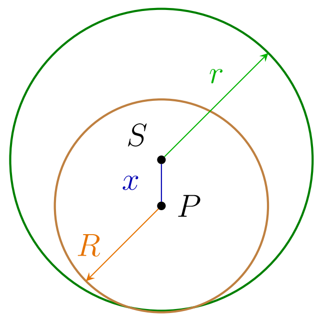
Рассмотрим первый вариант: $R < r$, $k > 1$. Обозначим центр планеты как P, а центр звезды — S и нарисуем три схемы:



Вид «сбоку», планета движется на нас



Вид с Земли, планета движется вправо



Вид с Земли, макс. фаза затмения

В случае, когда планета касается звезды внутренним образом в момент максимальной фазы, мы можем написать крайнее соотношение на радиусы из тех соображений, что поток падает в два раза (т.е. уменьшение видимой светящейся площади звезды падает в два раза): $k = \sqrt{2}$. Данная величина k является максимальной, т.к. при меньшем радиусе планеты невозможно получить падение блеска в два раза только из геометрических соображений. Получаем уравнение относительно радиуса звезды:

$$x^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 = (r+R)^2 = r^2\left(1+\frac{1}{k}\right)^2 \quad\Rightarrow\quad r = \frac{\sqrt{x^2+d^2/4}}{1+1/k} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} r \approx 41\times 10^3 \text{ км} \\ R \approx 29\times 10^3 \text{ км}. \end{cases}$$

Планета получилась примерно размером с Уран или Нептун, а принадлежность звезды к каким либо классам не очень ясна. Данная величина слишком мала для звезды Главной последовательности (строго говоря, это значение можно приписать красному карлику с массой менее 0.1 массы Солнца, но это противоречит полученной ранее массе звезды) и слишком велика для белого карлика. Таким образом, можно заключить, что этот вариант ($R < r$) не может объяснить данную кривую блеска.

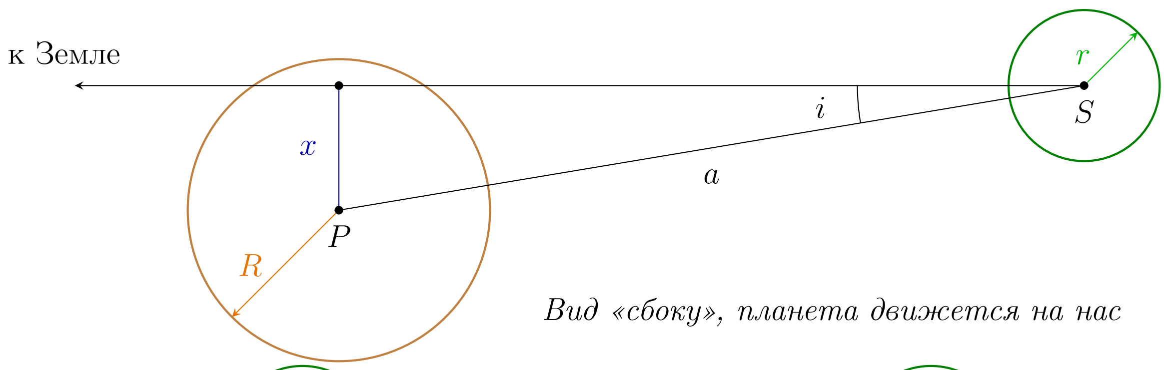
Отметим, что с уменьшением величины k радиус звезды r будет также уменьшаться, значит звезда скорее всего будет принадлежать белым карликам.

Рассмотрим пограничный вариант, когда звезда и планета совпадают по размерам: $R = r$, $k = 1$. Из уже написанной теоремы Пифагора получаем:

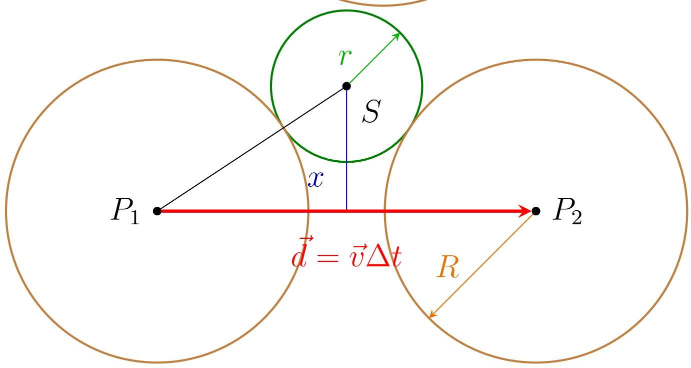
$$x^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 = (r+R)^2 = 4r^2 \qquad \Rightarrow \qquad r = \frac{\sqrt{60^2 + (72/2)^2}}{2} \approx 35 \times 10^3 \text{ км.}$$

Все равно звезда пока что слишком велика для белого карлика.

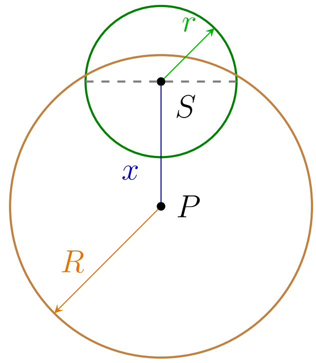
Осталось рассмотреть третий вариант: $R > r$. Снова изобразим три схемы:



Вид «сбоку», планета движется на нас



Вид с Земли, планета движется вправо



Вид с Земли, макс. фаза затмения

Точный подсчет площади пересечения двух кругов при известных радиусах и расстоянии между центрами хоть и относительно несложен, но довольно длинный и требует аккуратных вычислений (сумма сегментов двух кругов). При этом обратная задача (нахождение радиусов при известной площади) требует решения трансцендентного уравнения. Разумеется, его можно свести к кубическому (разложив синус в ряд до второго члена) хотя бы благодаря тому, что центральный угол около точки S неизбежно будет близок к $180°$, но это излишние сложности.

Поэтому для простоты будем считать, что точки пересечения коричневой и зеленой окружностей (см. схему справа снизу) лежат на диаметре (серый пунктир) меньшей окружности. По графику видно, что поток упал чуть-чуть больше, чем в два раза (погрешность измерений позволяет рассматривать подобное приближение), то есть половина диска звезды точно должна быть закрыта. Оставшееся «чуть-чуть» как раз будет зависеть от отношения радиусов окружностей: чем больше R, тем ближе к половине диска звезды будет закрыто. Таким образом, получаем соотношение между радиусами в виде очередной теоремы Пифагора:

$$r^2 + x^2 = R^2.$$

Проще составить систему уравнений относительно k и решить ее:

$$\begin{cases} R^2\,(1+k)^2 = x^2 + \frac{d^2}{4} \\ R^2\,(1-k^2) = x^2 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{(1+k)^2}{1-k^2} = 1 + \frac{d^2}{4x^2} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1+k}{1-k} = 1 + \frac{d^2}{4x^2}$$

$$k = \frac{d^2}{8x^2 + d^2} = \frac{1}{8\,(x/d)^2 + 1} = \frac{1}{8 \cdot (60/72) + 1} = \frac{3}{23}.$$

Теперь, зная k, можно найти и сами радиусы:

$$r = \frac{x}{\sqrt{(23/3)^2 - 1}} \approx 7.9 \times 10^3 \text{ км}; \qquad R \approx 6 \cdot 10^4 \text{ км}.$$

Итак, для радиуса звезды мы получили значение, соответствующее маломассивному белому карлику (его масса ≈ 0.5 масс Солнца). Планета похожа на Сатурн — газовый гигант.

Доподлинно известно, что белый карлик входит в тройную звездную систему и, поэтому, скорее всего, данная планета пережила стадию сброса оболочки красным гигантом и мигрировала к белому карлику из-за приливного воздействия соседних звезд.

Весьма точный анализ данной системы был проведен в статье, опубликованной в журнале Nature (*https://www.nature.com/articles/s41586-020-2713-y*, именно из нее и были взяты исходные данные для задачи), где было получено, что $r = 9150$ км, а $R \approx 65 \times 10^3$ км.

В.В.Григорьев