XXVI Санкт-Петербургская астрономическая олимпиада

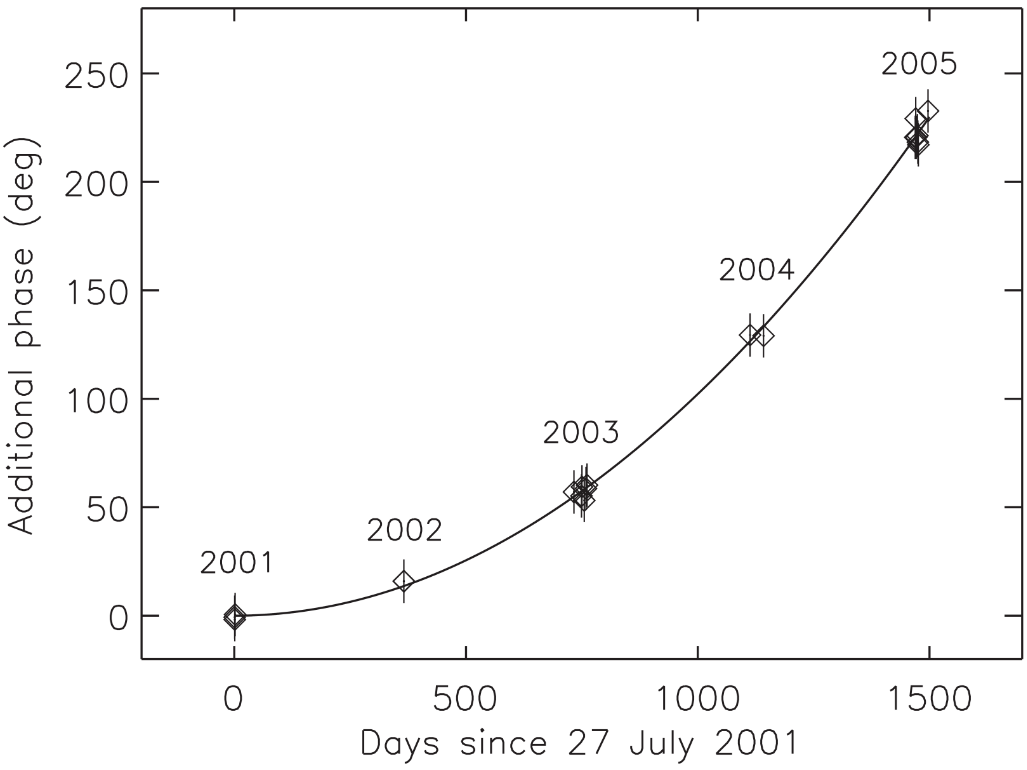
практический тур, решения

2019

3 марта

11 класс

1. Астероид 54509 YORP неравномерно вращается вокруг своей оси. На графике ниже показана поправка к фазовому углу в градусах (как функция времени), которую необходимо добавлять к зависимости фазового угла от времени для равномерного вращения, чтобы результат соответствовал наблюдательным данным. Определите вид зависимости наблюдаемого фазового угла от времени и найдите параметры этой зависимости. Предложите возможные причины подобной неравномерности.



По оси абсцисс отложено время в сутках (начиная с 27 июля 2001 года), по оси ординат — поправка к фазовому углу в градусах. Подписи к точкам на графике — год получения соответствующих данных.

Решение:

Если бы астероид вращался равномерно, то описать зависимость наблюдаемой фазы от времени можно было бы так:

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \omega t, \tag{1}$$

где φ_0 — фаза в начальный момент времени ($t = 0$), а ω — угловая скорость. Реально наблюдаемая фаза описывается так:

$$\varphi_{real}(t) = \varphi(t) + \varphi_{add}. \tag{2}$$

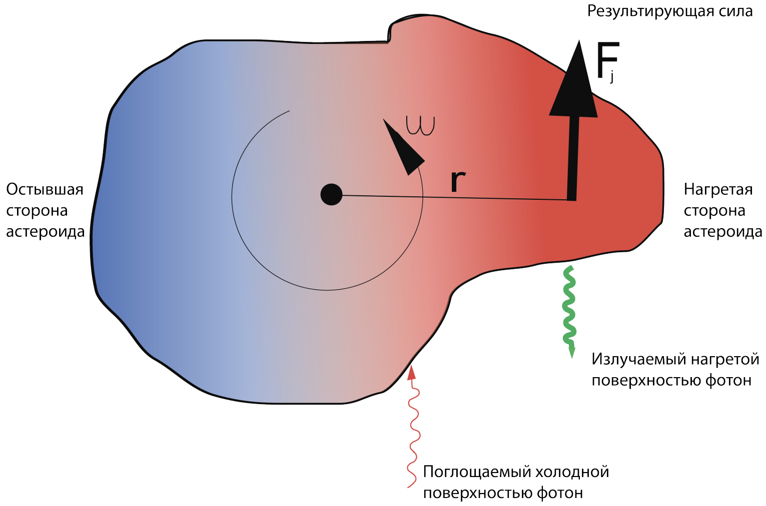
Посмотрев на график, можно заметить, что кривая на нем хорошо описывается параболой вида $\varphi_{add} = 0.5\beta t^2$. Коэффициент 0.5 выбран для того, чтоб наблюдаемая фаза описывалась уравнением, схожим с уравнением равноускоренного прямолинейного движения:

$$\varphi_{real}(t) = \varphi_0 + \omega t + \frac{\beta t^2}{2}. \tag{3}$$

Значит, β — угловое ускорение, которое как раз и характеризует неравномерность вращения.

При помощи линейки можно определить положения точек на графике и вычислить параметр $\beta = 2.0 \times 10^{-4}$ °/сут^2.

Наличие этого ускорения вызвано т.н. эффектом ЯОРП (эффект Ярковского–О'Кифа–Радзиевского–Пэддэка). Для данного астероида этот эффект наиболее сильный, именно поэтому он и получил такое название. Суть эффекта в том, что вращающийся вокруг своей оси астероид неравномерно нагревается Солнцем: когда нагретая сторона отворачивается от Солнца, холодная сторона только начинает нагреваться. Тепловое излучение от нагретой стороны сильнее, нежели от холодной, что и дает астероиду небольшую реактивную силу. Если бы астероид был сферическим, то эта реактивная сила лишь разгоняла бы астероид, изменяя его орбиту (эффект Ярковского). В реальности астероид имеет неправильную форму, поэтому появляется сила, действующая не радиально, а на некоторое плечо относительно центра масс астероида, тем самым вызывая изменение скорости вращения.



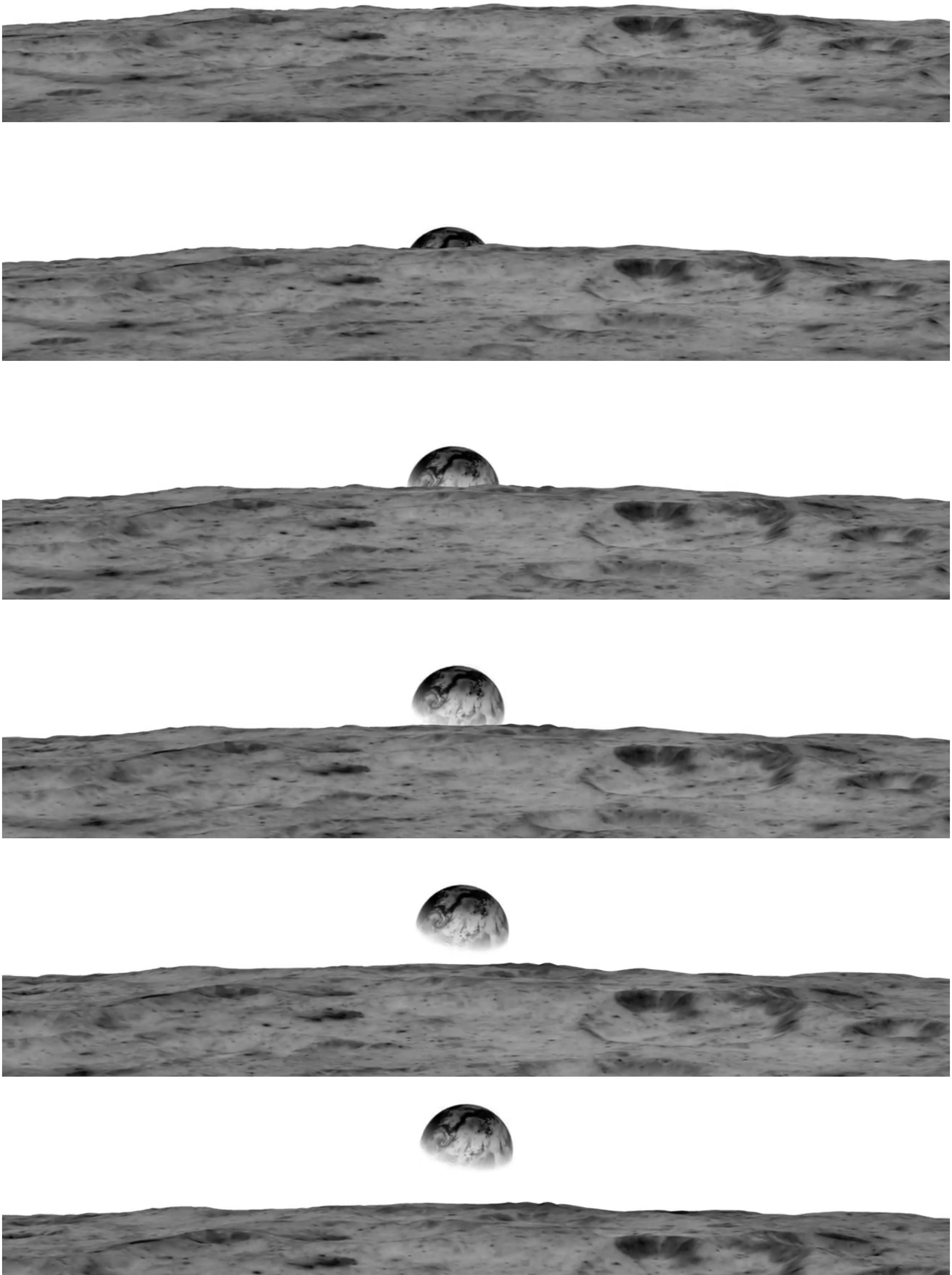
В.В.Григорьев

2. Серия снимков Земли на следующей странице была сделана космическим аппаратом, движущимся по круговой орбите вокруг Луны. Оцените, на какой высоте над поверхностью Луны летел аппарат, если известно, что интервал времени между соседними снимками равняется 8 секундам. Можно считать, что масса Луны в 81 раз меньше массы Земли, а диаметр — в 4 раза меньше диаметра Земли.

Решение:

Сразу заметим, что серия снимков — реальна, и была сделана астронавтами, облетавшими Луну 24 декабря 1968 года на «Аполлоне-8».

На серии снимков видна поднимающаяся из-за горизонта Луны Земля. По условию, интервал времени между соседними снимками равняется 8 с, поэтому время, прошедшее между первым и последним снимками, равно $5 \cdot 8 = 40$ с. Если внимательно присмотреться к первому снимку, то можно увидеть, что в тот момент, когда он был сделан,



из-за горизонта показался край земного диска. Если же на последнем снимке достроить изображение Земли до полного диска, то окажется, что в тот момент, когда был сделан последний снимок, Земля уже полностью показалась над лунным горизонтом и даже оказалась чуть-чуть выше его. Следовательно, 40 с — это время полного восхода Земли для наблюдателей с космического корабля. Определять время восхода с большей точностью бессмысленно ввиду неопределенности моментов начала и конца восхода. По серии рисунков также видно, что Земля восходит не совсем вертикально, но отклонение траектории ее восхода от вертикального направления очень мало, так что в оценочной задаче им можно пренебречь.

Луна все время повернута к Земле одной стороной, если не считать либраций. Однако период либраций равен периоду обращения Луны вокруг Земли и тем самым намного больше, чем 40 с. Отсюда очевидно, что эффект восхода Земли обеспечивается исключительно движением корабля.

Так как диаметр Земли в 4 раза больше лунного, то ее угловой диаметр на небе Луны также в 4 раза больше углового диаметра лунного диска на земном небе и равен $2°$. Тем самым угловая скорость аппарата равна $2°$ за 40 с, или $180°$/час, т.е. период обращения равен $P = 2$ часам.

Дальше задача заключается в том, чтобы найти высоту h орбиты спутника Луны с периодом 2 часа. Это можно делать разными способами. Самый прямой — это воспользоваться третьим законом Кеплера:

$$\frac{(R_{☾} + h)^3}{P^2} = \frac{GM_{☾}}{4\pi^2}$$

Отсюда

$$(R_{☾} + h)^3 = \frac{GM_{☾} P^2}{4\pi^2} = \frac{6.67 \cdot 10^{-11} \cdot 6 \cdot 10^{24} \cdot (2 \cdot 3600)^2}{4\pi^2 \cdot 81} \approx 4^3 \cdot 10^{17}$$

$$R_{☾} + h = \sqrt[3]{4^3 \cdot 10^{17}} = 4\sqrt[3]{100} \cdot 10^5 \text{ м} \approx 1800 \text{ км}.$$

Следовательно, т.к. $R_{☾} = R_{\oplus}/4 = 6400/4 = 1600$ км, то $h \approx 200$ км.

Второй способ: через круговую скорость. Круговая скорость для орбиты высотой h

$$v^2 = \frac{GM_{☾}}{R_{☾} + h}$$

Тогда отношение первой космической скорости (т.е. скорости на стелющейся круговой орбите) к скорости на орбите с высотой h равно

$$\left(\frac{v_{I☾}}{v}\right)^2 = \frac{R_{☾} + h}{R_{☾}}$$

С другой стороны

$$v = \frac{2\pi(R_{☾} + h)}{P},$$

тогда

$$v_{I☾}^2 = v^2 \frac{R_{☾} + h}{R_{☾}} = \frac{[2\pi(R_{☾} + h)]^2 (R_{☾} + h)}{R_{☾} P^2} = \frac{4\pi^2 R_{☾}^2}{P^2} \left(1 + \frac{h}{R}\right)^3$$

Первую космическую скорость для Луны можно найти по сравнению с первой космической скоростью для Земли:

$$\left(\frac{v_{I\leftmoon}}{v_{I\oplus}}\right)^2 = \frac{M_{\leftmoon}}{M_{\oplus}}\frac{R_{\oplus}}{R_{\leftmoon}} = \frac{4}{81},$$

тогда

$$\left(1+\frac{h}{R}\right)^3 = \frac{4v_{I\oplus}^2 P^2}{814\pi^2 R_{\leftmoon}^2} = \frac{8^2\cdot 2^2\cdot 3600^2}{9^2\cdot \pi^2\cdot 1600^2} \approx \frac{8}{5} = 1.6.$$

Далее можно либо приближенно вычислить $\sqrt[3]{1.6} \approx 1.17$, получив отсюда, что $h = 0.17\cdot 1600 \approx 270$ км, либо воспользоваться фактом, что $h/R_{\leftmoon}$ малая величина и, следовательно,

$$\left(1+\frac{h}{R}\right)^3 = 1 + 3\frac{h}{R} + 3\left(\frac{h}{R}\right)^2 + \left(\frac{h}{R}\right)^3 \approx 1 + 3\frac{h}{R}.$$

Тогда

$$1 + 3\frac{h}{R} \approx \frac{8}{5} \quad\Longrightarrow\quad \frac{h}{R} \approx \frac{1}{5},$$

следовательно $h \approx 300$ км.

Следует заметить, что мы получили завышенное значение высоты, т.к. реальный радиус Луны чуть больше значения, которое мы использовали, и равен 1734 км. Если иметь это в виду, то высота получится меньше и будет равна около 120 км, что соответствует реальной высоте, на которой летал «Аполлон-8».

М.В.Костина