XXV Санкт-Петербургская астрономическая олимпиада

отборочный тур, решения

2017–2018

15 декабря
18 января

10 класс

1. Эффективная температура красного гиганта в 2 раза меньше эффективной температуры Солнца. Его радиус составляет 70 радиусов Солнца. Определите абсолютную звездную величину красного гиганта.

Решение:

Известно, что светимость звезды L, ее радиус R и эффективная температура T связаны соотношением $L = 4\pi R^2 \sigma T^4$, где σ — постоянная Стефана-Больцмана. Записав это выражение для красного гиганта и для Солнца и разделив одно на другое, получаем

$$\frac{L_*}{L_\odot} = \left(\frac{R_*}{R_\odot}\right)^2 \cdot \left(\frac{T_*}{T_\odot}\right)^4.$$

Поскольку абсолютная звездная величина произвольной звезды M связана с ее светимостью как $M = -2.5 \lg L + \mathrm{const}$, то получаем

$$M_* - M_\odot = -2.5 \lg \frac{L_*}{L_\odot},$$

откуда

$$M_* = M_\odot - 5 \lg \frac{R_*}{R_\odot} - 10 \lg \frac{T_*}{T_\odot}.$$

Подставляя числа и учитывая, что $M_\odot \approx 5^m$, получаем $M_* = 5 - 5 \lg 70 - 10 \lg \frac{1}{2} \approx -1^m$.

В.В.Григорьев, П.А.Тараканов

2. При вспышке сверхновой в виде нейтрино выделилась энергия около 10^{46} Дж. Какую суммарную массу должны иметь тела, состоящие из материи и антиматерии, при аннигиляции которых выделилось бы столько же энергии?

Решение:

При полной аннигиляции массы M выделяется энергия $E = Mc^2$, где c — скорость света в вакууме, равная $3 \cdot 10^8$ м/с. Следовательно, искомая масса равна

$$M = \frac{E}{c^2} = \frac{10^{46}}{9 \cdot 10^{16}} \approx 10^{29} \text{ кг}.$$

М.В.Костина

3. Один крайне наблюдательный астроном заметил следующее:

- высота верхней кульминации некоторой звезды в два раза больше высоты ее нижней кульминации;

- склонение этой звезды в три раза больше широты города, где живет данный астроном.

Найдите склонение звезды, высоты ее кульминаций, а также широту города, где живет астроном.

Решение:

Составим две системы уравнений, исходя из условия задачи: одну для случая верхней кульминации к югу (S) от зенита, вторую — к северу (N), как обычно, обозначая φ широту города, δ — склонение звезды, а h (с соответствующими индексами) — высоты в кульминациях:

$$\begin{cases} h_{BKS} = 90^\circ - \varphi + \delta \\ h_{HK} = \varphi - 90^\circ + \delta \\ h_{BKS} = 2h_{HK} \\ \delta = 3\varphi \end{cases} \qquad \begin{cases} h_{BKN} = 90^\circ + \varphi - \delta \\ h_{HK} = \varphi - 90^\circ + \delta \\ h_{BKN} = 2h_{HK} \\ \delta = 3\varphi \end{cases}$$

Решая вторую систему (например, подставляя первое и второе уравнения в третье, а затем учтя четвертое) получим, что $\varphi = 27^\circ \Rightarrow \delta = 81^\circ$. Соответственно, $h_{BKN} = 36^\circ; h_{HK} = 18^\circ$.

Решая первую систему аналогичным способом, получаем $\varphi = 45^\circ \Rightarrow \delta = 135^\circ$, что невозможно.

Осталось не забыть, что южное полушарие ничем не хуже северного, поэтому итоговый ответ таков: широта города $\pm 27^\circ$; склонение звезды $\pm 81^\circ$ (причем знак соответствует знаку широты); высота в верхней кульминации 36°; высота в нижней кульминации 18°.

В.В.Григорьев

4. Два радиотелескопа РТ-32 Института прикладной астрономии РАН, расположенных в Ленинградской области и в Республике Бурятия, проводят совместные наблюдения в режиме интерферометра на длине волны 13 см. Оцените угловое разрешение такого интерферометра в секундах, если известно, что расстояние между обсерваториями составляет примерно 4300 км.

Решение:

Угловое разрешение интерферометра примерно равно тому угловому разрешению, которое имел бы один инструмент, наблюдающий на той же длине волны и имеющий размеры, равные расстоянию между компонентами интерферометра. Следовательно, угловое разрешение (в радианах) $\beta \approx \lambda / D$, где $\lambda = 13$ см, $D = 4300$ км. Поскольку в одном радиане примерно $2 \cdot 10^5$ угловых секунд, итоговый ответ вычисляется как

$$\beta'' = 2 \cdot 10^5 \, \frac{13}{4.3 \cdot 10^3 \cdot 10^5} \approx 0''.006$$

П.А.Тараканов

5. 15 сентября 2017 года в атмосфере Сатурна сгорела АМС Кассини. В качестве одного из вариантов окончания миссии Кассини-Гюйгенс рассматривался вариант столкновения АМС с Меркурием. Оцените, когда могло бы произойти такое столкновение и с какой относительной скоростью, если траектория полета была бы наименее энергозатратной. За момент отлета от Сатурна принять вышеуказанную дату. Для достижения каких целей можно было бы реализовать этот вариант?

Решение:

Наименее энергозатратный перелет между двумя планетами — это движение по эллипсу Гомана, апоцентр которого находится на орбите Сатурна, а перицентр — на орбите Меркурия. Поскольку нас интересует оценка, то орбиты планет можно считать круговыми и лежащими в одной плоскости.

Тогда, выяснив, что радиус орбиты Сатурна составляет примерно 9.5 а.е., а радиус орбиты Меркурия — около 0.4 а.е., получаем, что большая полуось эллипса Гомана равна $(9.5 + 0.4)/2 \approx 5$ а.е. Воспользовавшись III законом Кеплера и учитывая, что время перелета — это половина периода обращения по такой орбите, получим, что до орбиты Меркурия "Кассини" долетит через $\sqrt{125}/2 = 5.6$ лет, т.е. ориентировочно в марте 2023 года.

Отметим, что для столкновения с Меркурием необходимо, чтобы в этот момент Меркурий находился в точке, диаметрально противоположной (по отношению к Солнцу) к точке старта с орбиты Сатурна, а этого может и не произойти. Как следствие, март 2023 года — это только самый ранний возможный срок столкновения. Возможно, старт с орбиты Сатурна пришлось бы перенести на более позднее время (очевидно, что возможный диапазон моментов старта в такой ситуации примерно совпадает с периодом обращения Меркурия вокруг Солнца, т.е. столкновение произошло бы в марте–июне 2023 года).

Для оценки скорости воспользуемся интегралом энергии:

$$v_C = \sqrt{G\mathfrak{M}_\odot\left(\frac{2}{a_{☿}} - \frac{1}{a_C}\right)} \approx \sqrt{\frac{G\mathfrak{M}_\odot}{20/96 \text{ а.е.}}} \approx \sqrt{5}\cdot v_\oplus,$$

где G — гравитационная постоянная, $\mathfrak{M}_\odot$ — масса Солнца, $a_{☿}$ — радиус орбиты Меркурия, a_C — большая полуось эллипса Гомана, $v_\oplus$ — орбитальная скорость Земли. Вычисляем орбитальную скорость Меркурия (учитывая, что скорость движения по круговой орбите вокруг Солнца обратно пропорциональна корню из радиуса орбиты):

$$v_{☿} = v_\oplus/\sqrt{0.4} = \sqrt{2.5}v_\oplus.$$

Поскольку старт с орбиты Сатурна должен был производиться в ту же сторону, в которую вокруг Солнца вращаются планеты (иначе перелет не был бы энергетически выгодным), то "Кассини" будет догонять Меркурий, и относительная скорость столкновения составит $\Delta v = (\sqrt{5} - \sqrt{2.5})\cdot v_\oplus \approx 0.66 \cdot 30$ км/с $= 20$ км/с.

Отметим, что при сближении с Меркурием аппарат будет дополнительно разогнан гравитационным полем самого Меркурия, однако соответствующей поправкой можно пренебречь. Масса Меркурия невелика, вторая космическая скорость для Меркурия составляет всего около 4 км/с, и аккуратный подсчет показывает, что дополнительное увеличение скорости столкновения будет меньше 1 км/с.

Поскольку аппарат достаточно массивный (около 5 тонн), его столкновение с Меркурием на большой скорости должно было бы привести к заметному выбросу вещества с поверхности планеты, которое можно было бы наблюдать и, в частности, проводить спектральные наблюдения. Тем самым такие наблюдения стали бы существенным источником информации о химическом составе и физическом состоянии поверхности Меркурия.

В.В.Григорьев, П.А.Тараканов